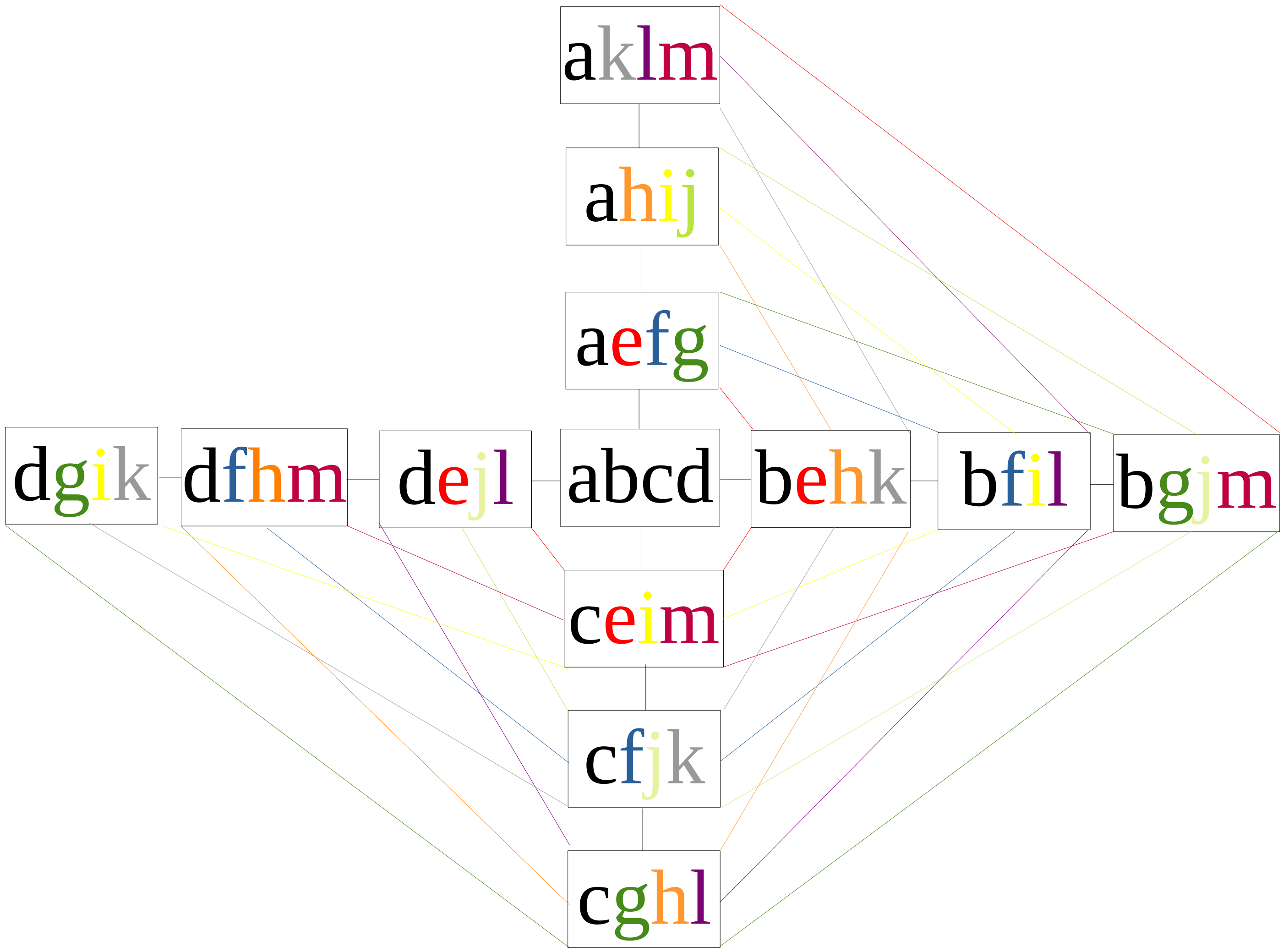
The MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 45 / januar 2020

Inhaltsverzeichnis		**Seite**

Liebe MadMax – Freunde,

mit einer großen Gruppe junger Forscher haben wir wieder eine Reihe spannender Themen bearbeitet. Wir haben mit einer Balkenwaage (mathematisch) experimentiert, Dreiecke und Quadrate versteckt, Geraden miteinander geschnitten und gedichtet.
Roman befasst sich in seiner Jufo-Arbeit mit den Tücken der Klassensprecherwahl und Axel hat ein beliebtes Gesellschaftsspiel – Dobble – analysiert. Das Titelbild dieser Ausgabe zeigt ein Beispiel für ein von ihm entwickeltes Dobble-Spiel mit 13 Karten und 13 Symbolen

Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

Euer MadMax –Team

Dobble – ein Spiel für Mathematiker

1. Was ist Dobble?

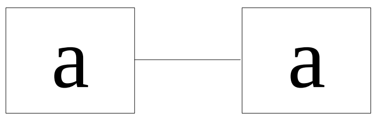
Dobble ist ein Gesellschaftsspiel mit 55 Karten. Auf jeder dieser Karten sind 8 Symbole aufgedruckt, wobei zwei Karten immer in genau einem Symbol übereinstimmen. Das Spiel wird mit mindestens zwei Leuten gespielt. Am Anfang liegt eine Karte vor allen Spielern und ein Stapel von Karten in der Hand der Spieler. Ziel ist es, das gemeinsame Symbol der Karte in seiner Hand und der Karte, die alle sehen können so schnell wie möglich zu erkennen um die Karte in seiner Hand loszuwerden indem man sie auf den Stapel legt. Man ruft dieses Symbol laut in die Runde. Der Spieler, der am Ende keine Karten mehr vor sich liegen hat, gewinnt.

Nachdem ich das Spiel letztes Jahr kennengelernt habe, hat es mir sehr gut gefallen und ich habe mich gefragt, wie der Erfinder des Spiels es geschafft hat und welche Mathematik dahinter steckt, dass je zwei Karten immer genau ein Symbol gemeinsam haben.
Es stellten sich für mich folgende Fragen:

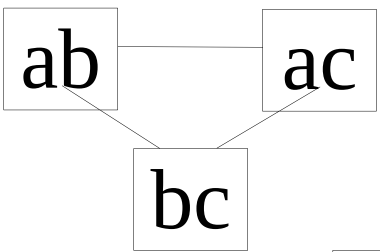
2. Erste Überlegungen

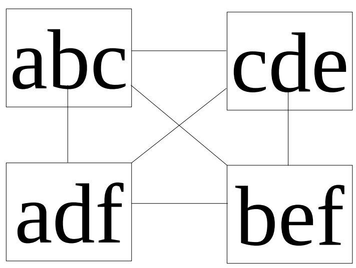
2.1 Ausprobieren mit wenigen Karten und wenigen Symbolen
Dobble ist wegen der vielen Karten sehr unübersichtlich. Deshalb habe ich Varianten mit weniger Karten und Symbolen gesucht. Hier ist erst einmal ein einfaches System Spiele herzustellen, bei denen jedes Symbol auf nur 2 Karten vorkommt.

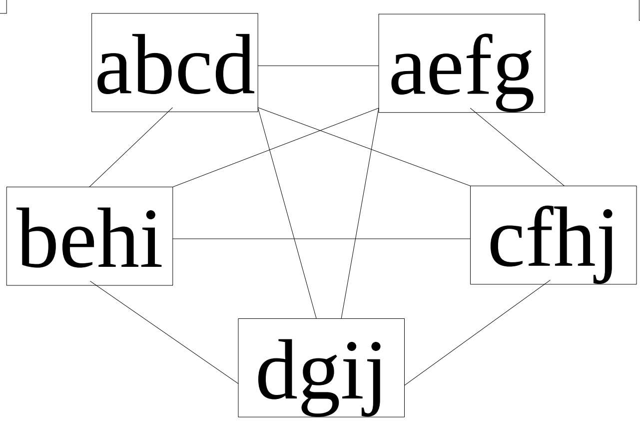
Triviale Lösung, da es hier nur ein Symbol gibt:

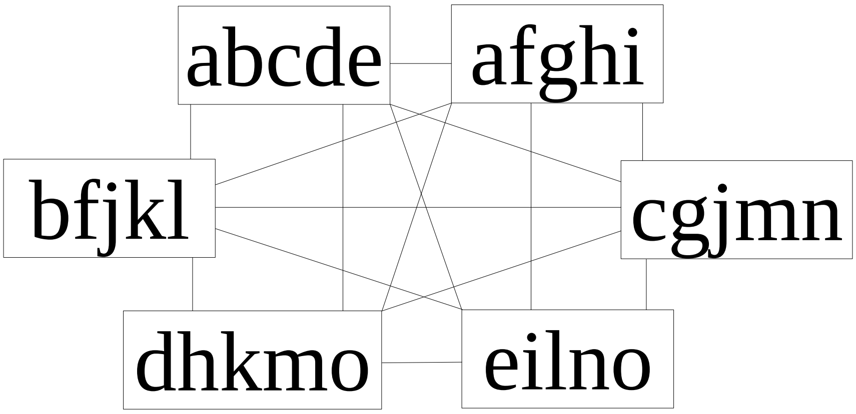


Hier sind weitere Möglichkeiten, wie ein Spiel mit mehr Karten aussehen könnte:









Es ist ein Muster feststellbar:
Während immer ein Symbol pro Karte hinzukommt, kommt auch eine Karte hinzu.
=> Symbole pro Karte + 1 = Anzahl an Karten

2.2 Festlegung der Variablen:
Nun werden Variablen festgelegt. Das ist sinnvoll um nicht so viel schreiben zu müssen und um sie in Rechnungen mit einzubeziehen in denen man ihre Beziehungen zueinander erläutert.
g : Gesamtanzahl der Symbole
s : Anzahl an Symbolen pro Karte
k : Anzahl an Karten
h : Häufigkeit der Symbole

Anhand der Beispiele kommt man auf folgende Werte:

Beispiel	g	s	k	h
1	1	1	2	1
2	3	2	3	2
3	6	3	4	2
4	10	4	5	2

3. Darstellungsformen und Entwicklung neuer Spiele:

3.1 Darstellungsformen
Jetzt werden zwei Möglichkeiten dargestellt, die Spiele mathematisch zu visualisieren. Die eine ist ganz normal mit Karten, wie auch bei dem Original, die Andere ist geometrisch. Auf die andere Möglichkeit hat mich mein Betreuer hingewiesen, da er sie in einem Artikel von Ralf Goertz gefunden hatte.

<u>1. Karten</u>
Hierbei werden, wie schon oben, die einzelnen Symbole als Variablen dargestellt und auf Karten geschrieben. Am Ende verbindet man alle Karten untereinander, um zu zeigen, dass jede Karte mit den anderen genau eine Variable gemeinsam hat.

Ein solches Spiel in dem die Symbole nur auf zwei Karten vorkommen zu entwickeln geht folgendermaßen:

1.Karte: Zuerst muss man festlegen, wie viele Karten das Spiel haben soll.
Wie im Kapitel 'Systematisierung' zu sehen braucht man dann k-1 Symbole pro Karte (s).
Dann schreibt man so viele Symbole auf die Karte.

2.Karte: Man nimmt das erste Symbol der ersten Karte (wahrscheinlich a) und s-1 neue Symbole um auf die Anzahl s zu kommen.

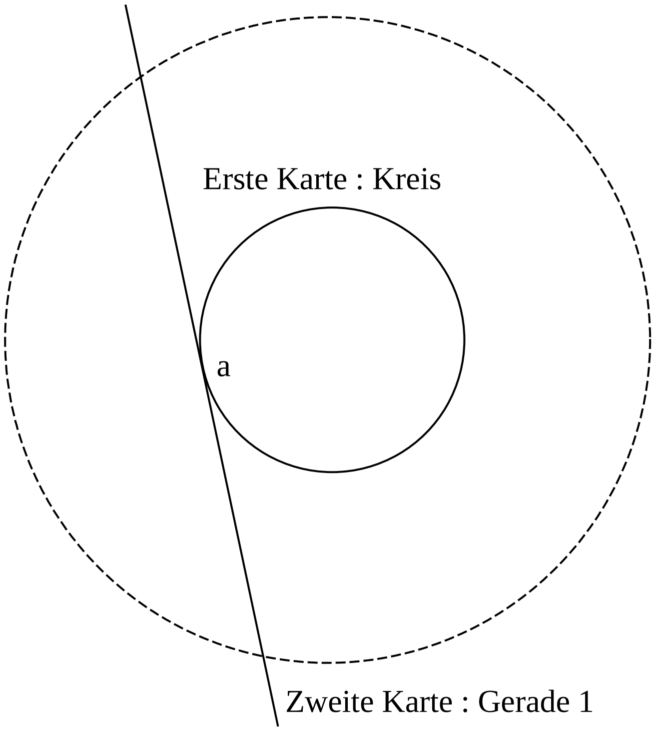
3.Karte: Man nimmt das zweite Symbol der 1.Karte und das zweite Symbol der 2.Karte und s-2 neue Symbole.

...

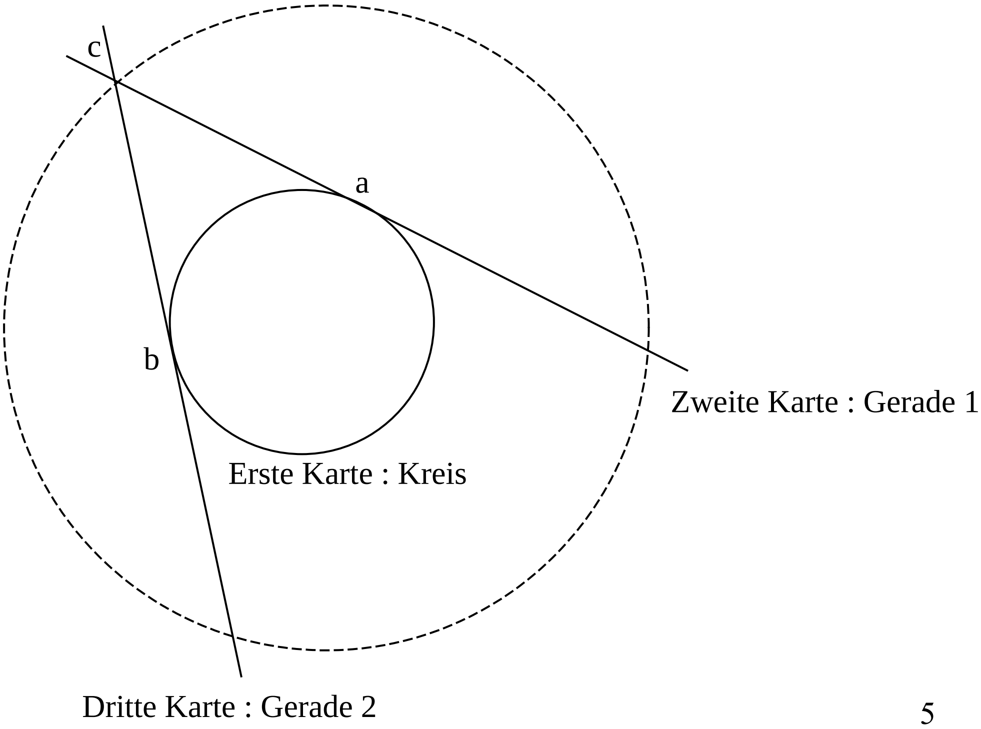
letzte Karte: Man nimmt von allen Karten das letzte Symbol.

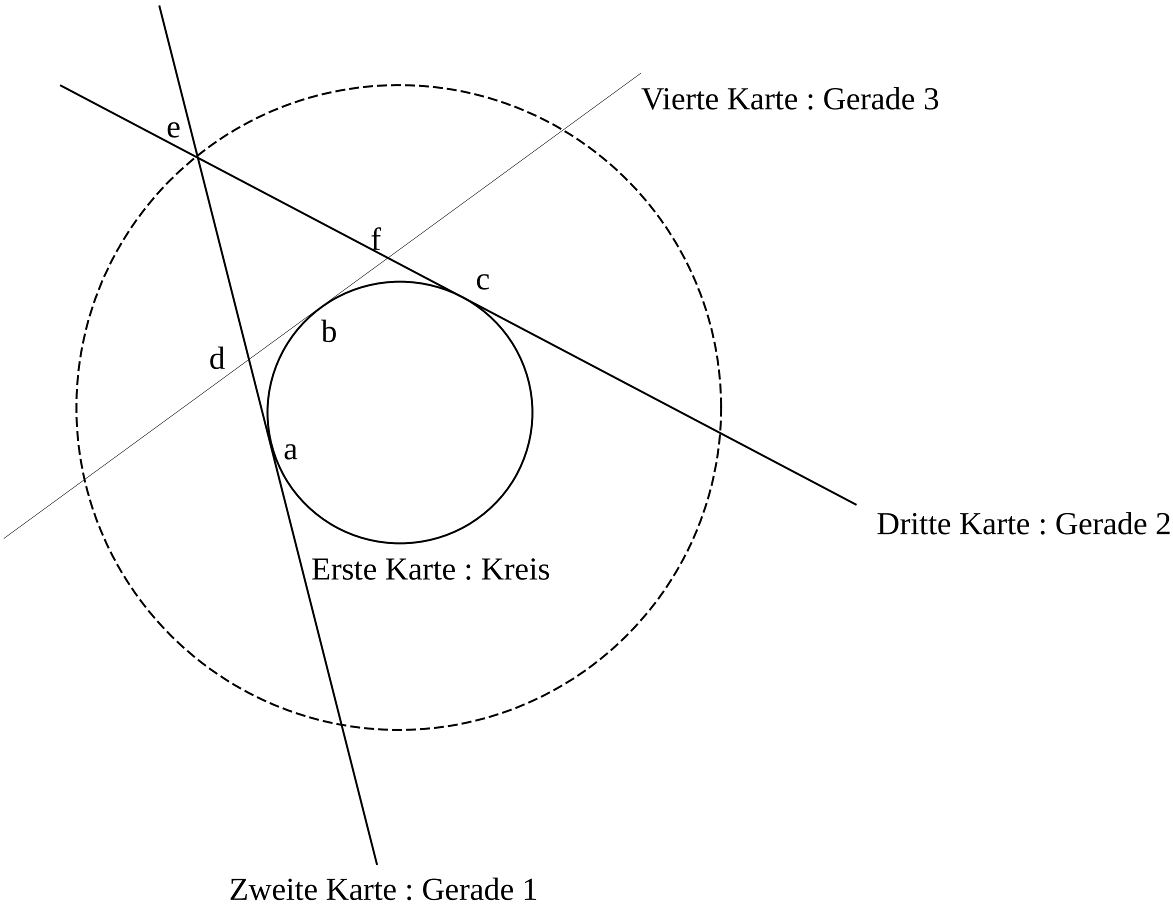
<u>2. Kreis und Geraden</u>

Eine Karte wird als Kreis und die anderen als nicht parallele Geraden dargestellt.
Der Gedanke ist, dass ein Schaubild entsteht, bei dem sich alle Linien untereinander schneiden und ein Schnittpunkt jeweils eine Symbol darstellt.
Dass ein Schnittpunkt ein Symbol darstellt, funktioniert aber nur, wenn die Häufigkeit der Symbole 2 ist, da sie dann nur auf 2 Karten zu sehen ist.
Wenn die Häufigkeit der Symbole nicht 2 ist, gilt die Darstellungsweise, aber nicht, dass ein Schnittpunkt ein Symbol darstellt.



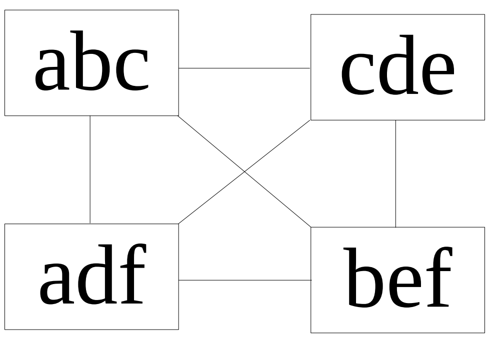
3.2 Spiele mit der Häufigkeit 2 der Symbole

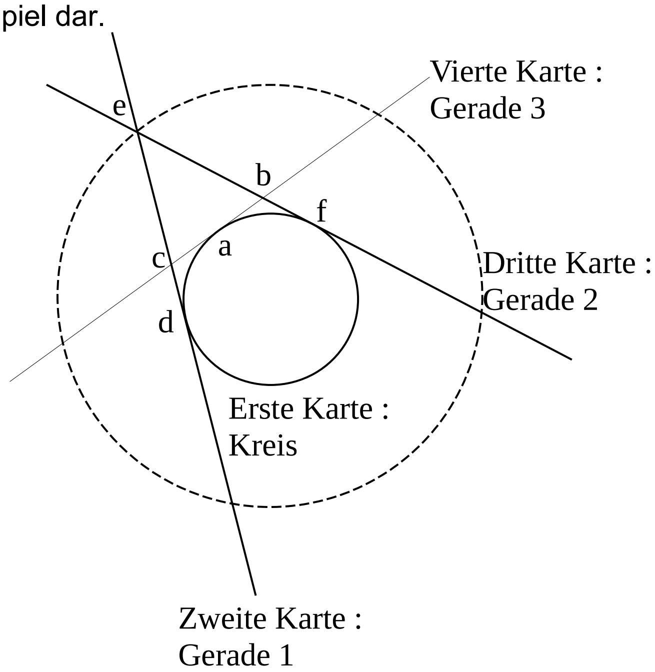




Mit dieser Methode kann man ebenfalls unendlich viele Spiele erzeugen. Man fügt einfach Geraden hinzu, die den Kreis ebenfalls tangieren und benennt die Schnittpunkte. Dabei muss man aber darauf achten, dass keine Geraden zufällig parallel zueinander sind,denn dann schneiden sie sich nicht mehr und es kann kein gemeinsames Symbol aus einem Schnittpunkt hervorgehen.

Gegenüberstellung:
Diese beiden Abbildungen stellen dasselbe Spiel dar.

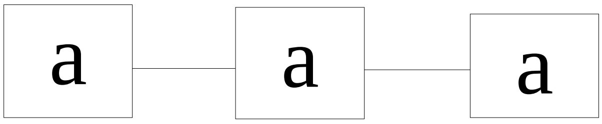




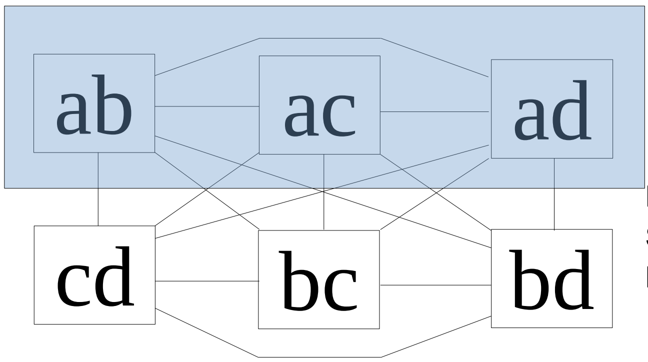
3.3 Spiele mit der Häufigkeit 3 und mehr

Bis jetzt kamen Symbole nur auf zwei Karten vor. Nun versucht man Spiele zu erstellen, bei denen sie 3 oder mehr Male vorkommen. Gibt es da auch ein System?

Triviale Lösung mit nur einem Symbol pro Karte:



Mehr Lösungen mit mehreren Symbolen pro Karte:

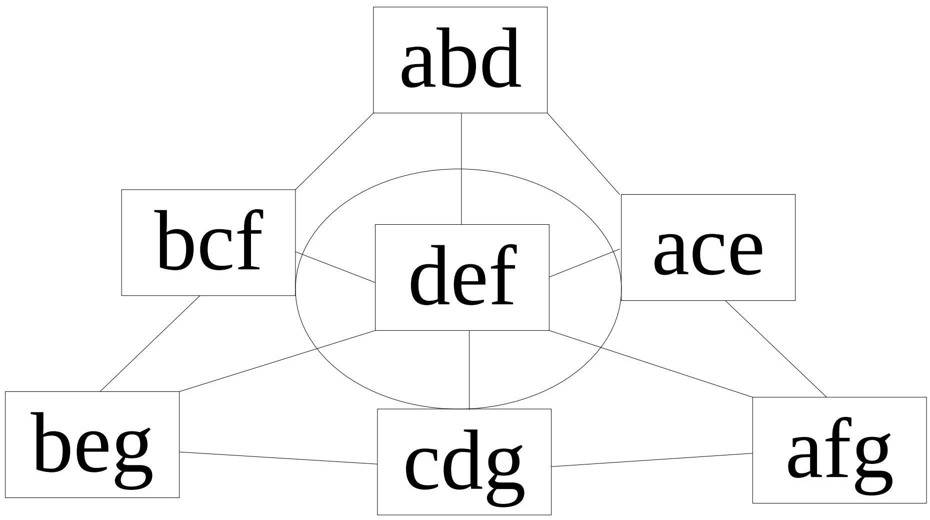


Auf diesen Karten kommt a 3 Mal vor

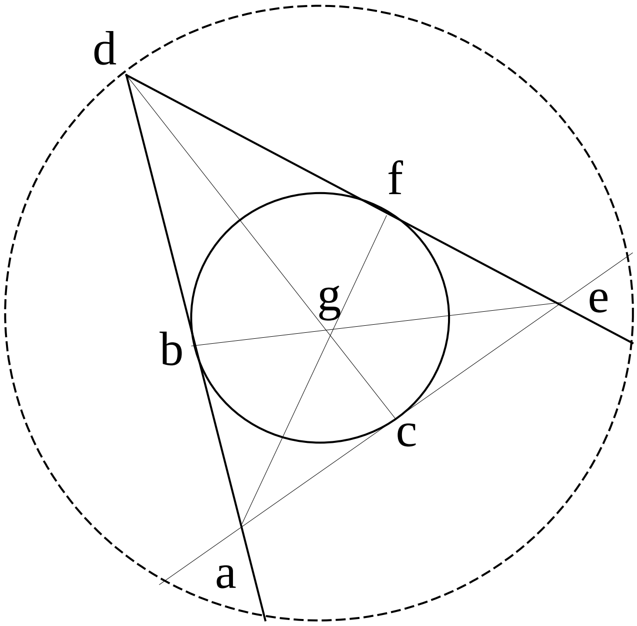
Das wäre eine Ergänzung, bei der alle Symbole 3 Mal vorkommen, doch manche Karten haben kein Symbol gemeinsam.

Bspw. haben die Karten 1 und 6 oder 3 und 4 kein gemeinsames Symbol.
Es geht auch prinzipiell nicht, ein Spiel dieser Art zu entwickeln, da keine Karte die drei Symbole b, c und d auf Einmal haben kann (a darf nicht auf diese Karte da gilt, dass die Symbole nur 3 Mal vorkommen).

Die folgende Abbildung stellt eine Zeichnung aus der Hartmann-Quelle dar.
Dort waren die Symbole als Farben dargestellt. Diesen Farbpunkten habe ich die ‚Namen' a, b, c… zugeordnet. (a = orange, b = rot, c = violett, d = blau, e = grün, f = weiß, g = gelb)
Man erkennt, dass jede Gerade ein Symbol und jeder Punkt eine Karte darstellt.



Das ist die Abbildung mit 7 Karten, 3 Symbolen pro Karte und der Häufigkeit 3 der Symbole in der anderen Darstellungsform. Im Gegensatz zu oben stellen hier die Punkte die Symbole und die Geraden die Karten dar.
Bspw. ist die Karte ace oben als Schnittpunkt von drei Geraden und unten als Gerade, auf der die drei Punkte a, c und e liegen zu finden.



Das Spiel mit Häufigkeit 4 hat entweder trivial nur 4 Karten mit nur einem Symbol pro Karte oder mehr als 13 Karten und min 4 S(k). Das liegt daran, dass wie bei der Spielvariante mit h = 3 die Spiele mit h = 1>x>4 nicht möglich sind. Wenn man versucht, ein solches Spiel zu erstellen, fängt man gewöhnlich bei den Karten mit a an:

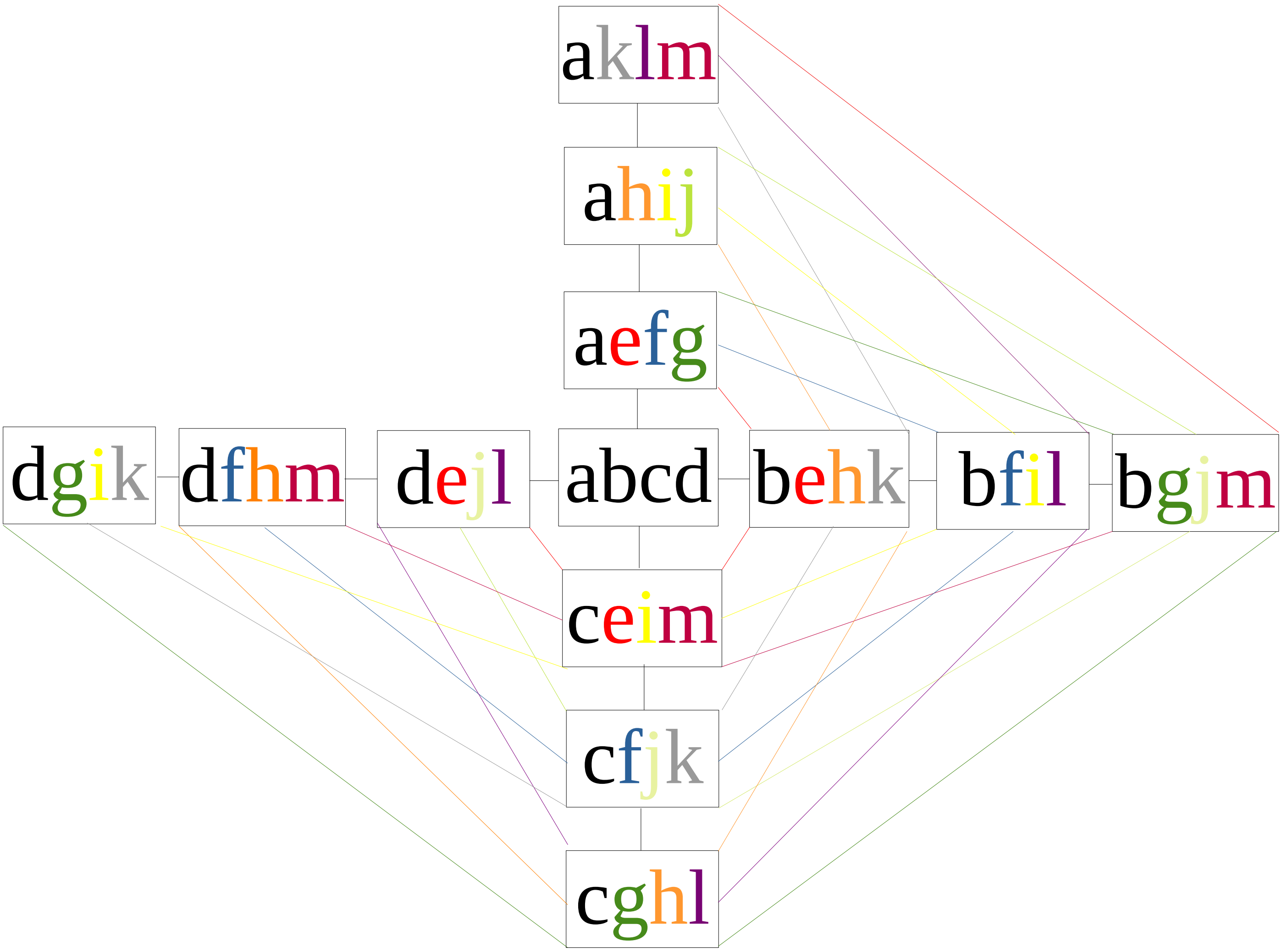
ab ac ad ae

~~bc~~ ~~bd~~ ~~be~~

Dann ergänzt man Karten mit den anderen Symbolen, doch es findet sich keine, auf die man Symbole außer a schreiben kann, wobei diese Karte mit jeder anderen ein Symbol gemeinsam haben müsste. Daraus folgt, dass die Anzahl der Symbole pro Karte genauso groß sein müsste wie die Häufigkeit. S = 1 stellt eine Ausnahme dar:

Häufigkeit der Symbole	Minimale Anzahl an Symbolen pro Karte
1	/
2	/
3	3 (Ausnahme 1)
4	4 (Ausnahme 1)
5	5 (Ausnahme 1)

Folgende Abbildung zeigt das Spiel mit h = 4 und s = 4. Sie lässt sich auch als 3-D Körper darstellen (→ Modell). Dann Sieht man als ‚Grundkarten' die Höhen eines Tetraeders. Dass die beiden Spiele sich genauso darstellen lassen liegt daran, dass Häufigkeit und Anzahl an Symbolen gleich sind.



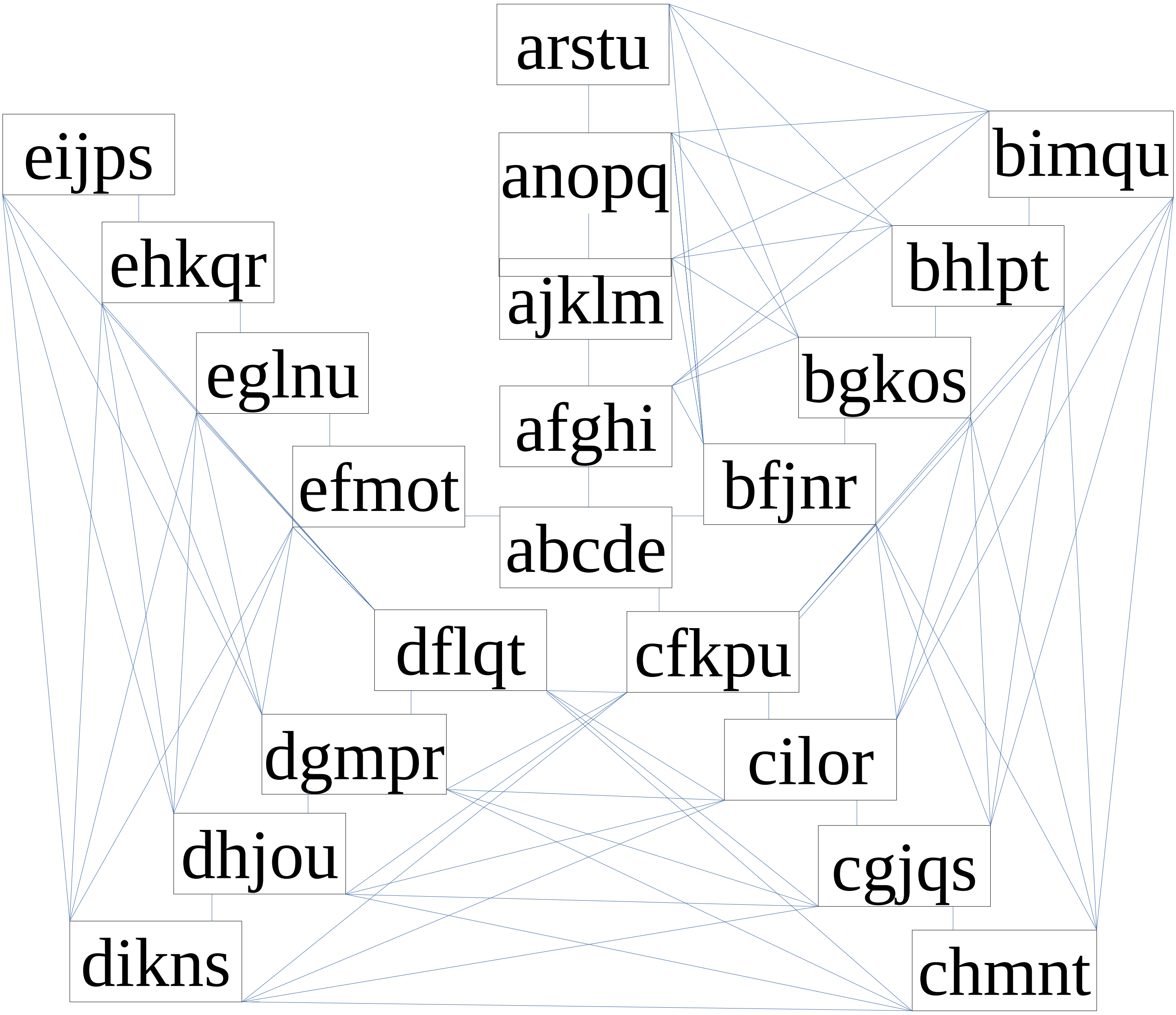
Dieses Bild zeigt das dreidimensionale Modell aus Lüsterklemmen und Draht, das das obere Spiel in der anderen Darstellungsweise zeigt.

Als letztes und kompliziertestes Modell habe ich das Spiel mit h = 5 und s = 5 dargestellt:

Auch diese Figur lässt sich als 3-dimensionales Objekt abbilden, ähnlich wie die Figur mit s = h = 4. Man kann auch als Prognose festhalten, dass Spiele mit h = s = 6, 7 oder n auch 6, 7 oder n Grundkarten, also Karten, die mit a anfangen haben würden. Zudem sähen sie aus wie ein 6-, 7- oder n-Eck!

Als nächstes kann man das originale Spiel mit den oberen vergleichen.
Dann erfährt man eine Überraschung, Dobble ist gar kein perfektes Spiel!
Nämlich kommen manche Symbole unterschiedlich häufig vor. Bspw. kommen die Hand und der Marienkäfer nur 7 Mal, der Mond und der Apfel hingegen 8 Mal vor.
Das heißt, dass die Gewinnchancen minimal verschoben sind, je nachdem welche Karte man erwischt.

In den Bildern sieht man die Symbole Hand und Marienkäfer (oben) , die je 7 Mal vorkommen und die Symole Mond und Apfel (unten), die je 8 Mal vorkommen.



Literatur:

https://www.bfmathematik.de/wp-content/uploads/2015/08/Hartmann-Endlich-Geometrie-spielen.pdf
https://www.spektrum.de/pdf/72-77-sdw-06-2018-pdf/1563112?file
https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/33174/1/BzMU14-4ES-Hartmann-290.pdf

Mathegedichte

1. Um was es geht

In unserem Mathegedicht geht es um ein Gedicht mit 7 Versen und vielen Zahlen, die auf eine rätselhafte Zahl führen. Das Gedicht haben wir auf folgender Seite gefunden:

https://www.mathe-mv.de/fileadmin/uni-rostock/Alle_MNF/Mathe-MV/Publikationen/Sekundarstufe_I/Monatsaufgaben_Serie_2.pdf

Die Verse reimen sich und sind dabei sinnvoll. Das Gedicht hört sich sehr knifflig an:

Eine Zahl hab` ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

2.Unsere Lösung

Die Lösung findet man, wenn man von hinten beginnt. Und alle Rechnungen umkehrt:

Die Zahl 7 hab ich gewählt
15 zugezählt
dann durch 11 dividiert
und mit 100 multipliziert
endlich 107 subtrahiert
und dann ist mir geblieben einzig
die geheimnisvolle 93.

Wenn man das umgekehrte Gedicht nachrechnet, dann erhält man die 93. Man beginnt mit der 7:

$7 + 15 = 22$
$22 : 11 = 2$
$2 \times 100 = 200$
$200 – 107 = 93$

Die Probe mit der 93 kann man dann in dem Originalgedicht machen:

$93 + 107 = 200$
$200 : 100 = 2$
$2 \times 11 = 22$
$22 – 15 = 7$

3. Wir dichten selbst

So ein Gedicht haben wir selber gemacht und dabei aufgepasst, dass die Verse nicht so lang sind:

Eine Zahl hab ich gewählt
105 zugezählt
und durch 11 dividiert,
dann mit 5 multipliziert
und die 43 subtrahiert
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Um sie Lösung (die Zahl 5) zu finden haben wir von hinten begonnen und alle Rechnungen umgekehrt:

Die Zahl 7 hab ich gewählt
und die 43 zugezählt
dann durch 5 dividiert
und mit 11 multipliziert
105 subtrahiert
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 5

Erklärung für die 5:

7 + 43 = 50
50 : 5 = 10
10 x 11 = 110
110 – 105 = 5

Wir fanden heraus dass man die Zahlen in den Gedichten finden kann, wenn man von hinten rechnet und dass es ganz leicht ist, selber solche Gedichte zu schreiben.

Wer wird Klassensprecher?

1. Einleitung

Bei der letzten Klassensprecherwahl kam die Frage auf, ob man auf den Wahlzettel nur ein, zwei oder drei Namen auf den Zettel schreiben soll.

Es hat Vorteile, vor allem für nicht so beliebte Kandidaten, die zum Beispiel nur Zweitstimmen bekommen. Denn wenn man die Gewichtung der Erst- und Zweitstimmen anpasst, kann ein nicht so beliebter Kandidat trotzdem gewinnen.

2. Untersuchung an einem selbst gemachten Beispiel

Zuerst habe ich mir ein Beispiel mit 10 Wählern und 3 Kandidaten gebastelt. Die Stimmen habe ich mir selbst ausgedacht. Die Wähler können einen Kandidaten auf den ersten Platz setzen und dann den zweiten Platz vergeben und der übrige Kandidat kommt auf den dritten Platz. Die folgende Tabelle zeigt die Reihenfolgen der 10 Schüler (Wählerprofil):

	Kandidaten		
Schüler	A	B	C
1	1	3	2
2	1	3	2
3	3	1	2
4	2	3	1
5	1	3	2
6	3	1	2
7	3	2	1
8	2	1	3
9	1	3	2
10	1	2	3

Wenn man nur die Erststimmen zählt, dann gewinnt Kandidat A und B wird mit 3 Stimmen Zweiter und C ist Letzter. Hier ist die Gewichtung (1/0/0).

Wenn man die Gewichtung (2/1/0) wählt, dann bekommt Kandidat A: 5 x 2 + 2 x 1 = 12 Punkte, Kandidat B: 3 x 2 + 2 x 1 = 8 Punkte und Kandidat C: 2 x 2 + 6 x 1 = 10 Punkte. Dann gewinnt also auch Kandidat A, aber jetzt ist C Zweiter.

Wenn man jedoch die Gewichtung zu (1/1/0) verändert, dann bekommt Kandidat A: 5 x 1 + 2 x 1 = 7, B: 3 x 1 + 2 x 1 = 5 und C: 2 x 1 + 6 x 1 = 8. Hier gewinnt jetzt Kandidat C sogar.

Das heißt, dass A und C gewinnen können. Ich habe aber keine Gewichtung gefunden, damit B gewinnt.

Das liegt auch daran, dass es für die Gewichtung eine wichtige Regel gibt:

Ein weiter hinten angeordnete Stimme darf nicht mehr Punkte haben als eine, die vor ihm liegt. Zum Beispiel ist die Gewichtung (2/1/2) nicht erlaubt.

3. Vom Wählerprofil zur Wahlmatrix – Bordawahlen

Da das Wählerprofil nicht so übersichtlich ist, schreibe ich das Wählerprofil um in eine Wahlmatrix und die Gewichtung in einen Wahlvektor. Wie man das macht, hat mir mein Betreuungslehrer erklärt.

Die Wahlmatrix sieht so aus:
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1. & 2. & 3. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

In den Zeilen stehen von links nach rechts die Anzahl an Stimmen vom ersten Platz bis zum dritten Platz: 5 Wähler haben Kandidat A auf den 1. Platz gesetzt, 2 Wähler auf den 2. Platz und 3 Wähler auf den 3. Platz. usw.

Die Matrix hat den Vorteil, dass man die Gewichtung schneller und einfacher anwenden kann, jedoch kann man jetzt nicht mehr sehen, welcher Wähler wen z.B. als erstes gewählt hat.

Anwendung: Wenn man die Zahlen der Gewichtung übereinander schreibt, erhält man den sogenannten Bordavektor (er ist nach dem französischen Mathematiker Borda benannt). Das folgende Beispiel zeigt, wie man den Bordavektor dreht und die Stimmen mit der im Bordavektor stehenden Zahl multipliziert:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot2+2\cdot1+3\cdot0 \\ 3\cdot2+2\cdot1+5\cdot0 \\ 2\cdot2+6\cdot1+2\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Kandidat A hat also 12 Punkte, B hat 8 Punkte und C hat 10.

Man kann erkennen, dass Kandidat B nicht gewinnen kann, weil er gleich viele Zweitstimmen wie Kandidat A hat und weniger Erststimmen hat.

Mit einer anderen Gewichtung kann auch Kandidat C gewinnen.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot2+2\cdot2+3\cdot0 \\ 3\cdot2+2\cdot2+5\cdot0 \\ 2\cdot2+6\cdot2+2\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt Kandidat C mit 16 Punkte, A hat 14 Punkte und B hat 10.

Das folgende ist ein Beispiel von meinem Lehrer, bei dem jeder der drei Kandidaten Gewinner sein kann. Es hat 15 Wähler:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 4 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt A vor C vor B

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 4 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix}$$ Hier gewinnt B vor C vor A

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 4 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 25 \\ 26 \end{pmatrix}$$ Hier gewinnt C vor B vor A

Ich habe dann selbst ein neues Beispiel mit 30 Schülern gebastelt, bei dem auch jeder gewinnen kann:

$$\begin{pmatrix} 16 & 2 & 12 \\ 10 & 13 & 7 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$ Hier gewinnt A vor C vor B

$$\begin{pmatrix} 16 & 2 & 12 \\ 10 & 13 & 7 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 23 \\ 22 \end{pmatrix}$$ Hier gewinnt B vor C vor A

$$\begin{pmatrix} 16 & 2 & 12 \\ 10 & 13 & 7 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 33 \\ 35 \end{pmatrix}$$ Hier gewinnt C vor A vor B

Vermutung: Die Kandidaten mit weniger Erststimmen müssen eine höhere Summe an Erst- und Zweitstimmen haben als der mit den meisten Erststimmen, um gewinnen zu können.

4. Analyse einer „echten“ Wahl

Bis jetzt habe ich mir immer eigene Beispiele so konstruiert, dass jeder Kandidat oder zwei Kandidaten gewinnen. Aber gilt das auch bei Wahlen in einer echten Klasse?

Zumindest dann, wenn es keine eindeutigen Lieblingskandidaten in einer Klasse gibt (wenn alle Kandidat A als ersten setzen, dann kann nie ein anderer Kandidat die Wahl gewinnen).

Erste Klasse: Das ist eine 7. Klasse, in der mein Lehrer eine echte Wahl gemacht und mir die Wahlzettel gegeben hat.

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 9 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$ B gewinnt vor A vor C

Hier kann sonst keiner gewinnen, da B zu viele Erst- und Zweitstimmen hat.

Die erste Klasse war also sehr ernüchternd. Deshalb habe ich meinen Lehrer gefragt, ob er es noch in einer zweiten Klasse probieren kann.

Zweite Klasse:

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 & 2 \\ 7 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

A gewinnt vor B vor C

Auch hier kann nur A gewinnen, da die Erststimmen relativ gleich aufgeteilt sind, aber die Zweitstimmen sehr einseitig aufgeteilt sind.

Jedoch wenn man in jeder Reihe zwei Stimmen verschiebt, dann kann jeder gewinnen.

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

C gewinnt vor B vor A

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

A gewinnt vor B vor C

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \\ 19 \end{pmatrix}$$

B gewinnt vor A vor C

Das ist eine Matrix, bei der es mehr Wähler gibt. Diese habe ich aus den beiden vorherigen Klassen zusammen gestellt, aber ein paar Stimmen geändert.

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 10 \\ 15 & 12 & 12 \\ 14 & 14 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt B vor C vor A

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 10 \\ 15 & 12 & 12 \\ 14 & 14 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 81 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt A vor C vor B

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 10 \\ 15 & 12 & 12 \\ 14 & 14 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 69 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt C vor A vor B

Man sieht das jetzt zwei der Kandidaten gewinnen können.

Vier Kandidaten: Hier habe ich eine Wählermatrix mit insgesamt 40 Wählern.

$$\begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 & 10 \\ 14 & 15 & 10 & 1 \\ 13 & 17 & 10 & 0 \\ 12 & 19 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt A vor B vor C vor D

$$\begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 & 10 \\ 14 & 15 & 10 & 1 \\ 13 & 17 & 10 & 0 \\ 12 & 19 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \\ 30 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt D vor C vor B vor A

$$\begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 & 10 \\ 14 & 15 & 10 & 1 \\ 13 & 17 & 10 & 0 \\ 12 & 19 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 39 \\ 40 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt C vor B vor D vor A

$$\begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 & 10 \\ 14 & 15 & 10 & 1 \\ 13 & 17 & 10 & 0 \\ 12 & 19 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 57 \\ 56 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnt B vor C vor D vor A

Auch hier können alle vier Kandidaten gewinnen.

Fazit: Man kann Matrizen, bei der jeder Kandidat gewinnen kann, selber zusammenstellen, aber es klappt in der Realität eher nicht.

Jedoch wenn der Lehrer seine Klasse gut kennt, kann er schon im Vorhinein die Stimmen so gewichten, wie er es will. Zum Beispiel, wenn ein Kandidat nur von seiner Clique gewählt wird, kann man die Zweitstimmen schwerer gewichten und so einen anderen Kandidaten, der eher Zweitstimmen bekommt, gewinnen lassen.

Außerdem vermute ich, dass es einfacher ist, wenn es mehr Wähler gibt.

Literatur: https://de.wikipedia.org/wiki/Borda-Wahl

Wie oft schneiden sich fünf Geraden?

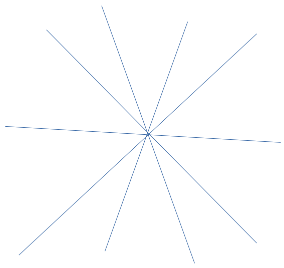
1. Einleitung

Wir müssen herausfinden, wie oft sich 5 Geraden schneiden. Sie heißen a, b, c, d und e und sollen sich keinmal, einmal, zweimal, dreimal, viermal, fünfmal, sechsmal, sieben, achtmal, neunmal und zehnmal scheiden (Schnittpunkte).

Zwei Beispiele sind ganz einfach zu finden:

Keinmal schneiden:

Einmal schneiden:

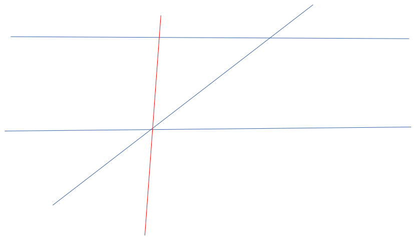


Aber geht es immer?

2. Unsere Lösungen

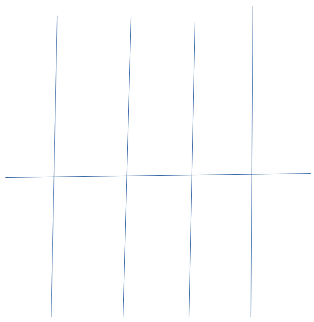
Keinmal und einmal schneiden haben wir ja schon in der Einleitung gezeigt. Jetzt untersuchen wir die anderen Zahlen.

Zweimal: Im folgenden haben wir gezeigt, warum zwei Schnittpunkte mit 5 Geraden unmöglich sind. Wenn man mit 3 Geraden 2 Schnittpunkte hat und dann noch eine Gerade (rot) hinzufügt, dann bringt die mindestens noch einen Schnittpunkt mit sich.

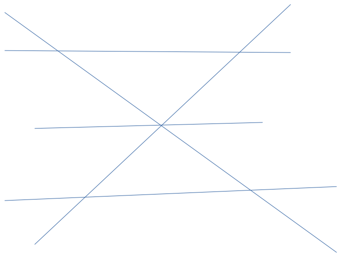


Dreimal: Das gleiche Beispiel zeigt, dass auch 3 Schnittpunkte nicht möglich sind, weil noch eine Gerade fehlt. Dann kommt auf jeden Fall noch ein vierter Schnittpunkt dazu.

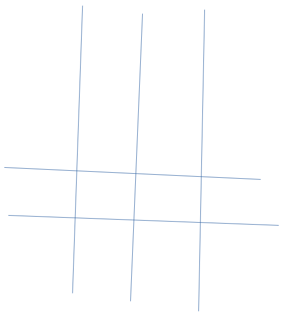
Viermal:



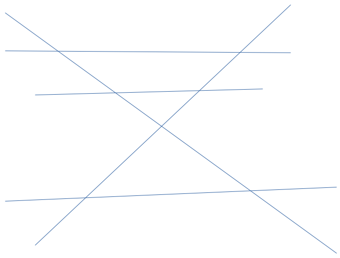
Fünfmal:



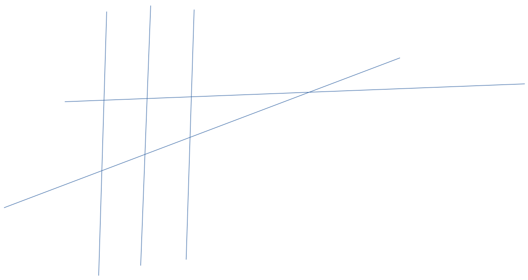
Sechsmal:



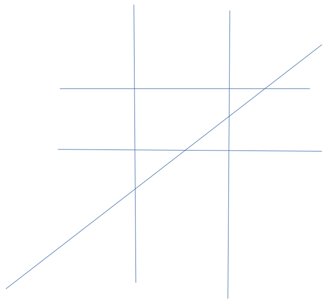
Siebenmal:



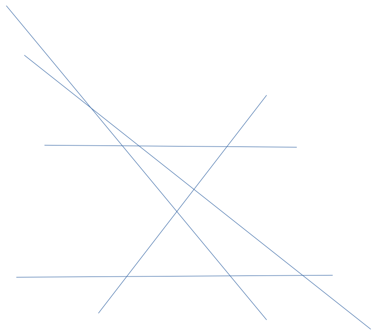
Das ist eine Alternativlösung für 7 Schnittpunkte:



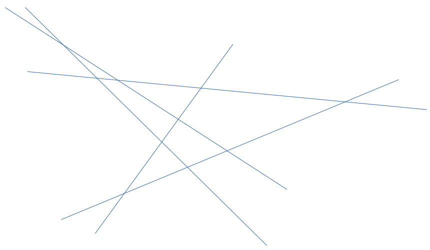
achtmal:



neunmal:



zehnmal:



Damit haben wir unser Problem erfolgreich gelöst und gezeigt, dass es nur mit zwei und drei Schnittpunkten nicht geht.

Experimente mit der Balkenwaage

1. Das Problem

Man will auf einer Balkenwaage alle ganzzahligen Massen von 1 g bis 40 g abwägen. Dafür sollen nicht mehr als 4 Wagestücke dafür benutzt werden.

Welche Massen müssen die einzelnen Wagestücke besitzen? Wie sind die Wagestücke auf die Schalen der Waage zu legen, damit man alle ganzzahligen Massen von 1 g bis 40 g bestimmen kann?

Dabei kann man die Wagestücke auch auf beide Seiten der Waage verteilen.

2. Unsere Lösung

Zuerst haben wir uns überlegt, dass man aus den 4 „Gewichtszahlen“ der Wagestücke die Zahl 40 bilden muss. Das hat schon viele Möglichkeiten ausgeschlossen. Als nächstes haben wir uns gedacht, dass man für ein Wagestück eine Zahl braucht, die recht mittig liegt. Dafür haben wir die 20 ausgewählt und sie durch 2 geteilt. Das gleiche haben wir mit den Ergebnissen auch gemacht. Ab der 5 ging es aber nicht mehr weiter. Diese Idee hat uns auf eine andere Idee gebracht. Wir haben die 1 genommen und die mit 3 multipliziert. Das taten wir 3 mal. So kamen wir auf die Zahlen 1, 3, 9 , 27.

Die folgende Tabelle zeigt unsere Lösung für die Verteilung der Wagestücke auf den beiden Seiten der Waage. Dabei sollen die „Minus-Gewichte“ auf der Seite der Zahl liegen und die „Plus-Gewichte“ auf der anderen Seite:

Zahl	Verteilung der Gewichte	Zahl	Verteilung der Gewichte
1	+ 1	21	27 - 9 + 3
2	3 - 1	22	27 - 9 + 3 + 1
3	+ 3	23	27 - 3 - 1
4	1 + 3	24	27 - 3
5	9 – 3 -1	25	27 - 3 + 1
6	9 - 3	26	27 - 1
7	9 – 3 + 1	27	+ 27
8	9 - 1	28	27 + 1
9	+ 9	29	27 + 3 - 1
10	9 + 1	30	27 + 3
11	9 + 3 - 1	31	27 + 3 + 1
12	9 + 3	32	27 + 9 - 3 - 1
13	9 + 3 + 1	33	27 + 9 - 3
14	27 - 9 - 3 - 1	34	27 + 9 - 3 + 1
15	27 – 9 - 3	35	27 + 9 - 1

16	27 - 9 - 3 + 1	36	27 + 9
17	27 - 9 - 1	37	27 + 9 + 1
18	27 - 9	38	27 + 9 + 3 - 1
19	27 - 9 + 1	39	27 + 9 + 3
20	27 - 9 + 3 - 1	40	27 + 9 + 3 + 1

3. Wie es weiter geht

Man braucht ein Wagestück, das 81 g wiegt, um alle Zahlen bis 121 g legen zu können:

Zahl	Verteilung der Gewichte	Zahl	Verteilung der Gewichte
41	81 - 27 - 9 - 3 - 1	99	81 + 27 - 9
42	81 - 27 - 9 - 3	...	
43	81 - 27 - 9 - 3 + 1	111	81 + 27 + 3
44	81 - 27 - 9 - 1	112	81 + 27 + 3 + 1
45	81 - 27 - 9	113	81 + 27 + 9 – 3 - 1
...		...	
66	81 – 27 + 9 + 3	119	81 + 27 + 9 + 3 - 1
67	81 – 27 + 9 + 3 + 1	120	81 + 27 + 9 + 3
68	81 – 9 – 3 - 1	121	81 + 27 + 9 + 3 + 1
...		...	
76	81 – 9 + 3 + 1		
77	81 – 3 - 1		
78	81 - 3		
...			
81	81		
82	81 + 1		
83	81 + 3 - 1		
66			
97	81 + 27 – 9 - 3 + 1		
98	81 + 27 – 9 - 1		

Wenn man Zahlen „wiegen" will, die größer als 121 sein sollen, muss man die größte Zahl mit 3 (in diesem Fall die 81) multiplizieren.

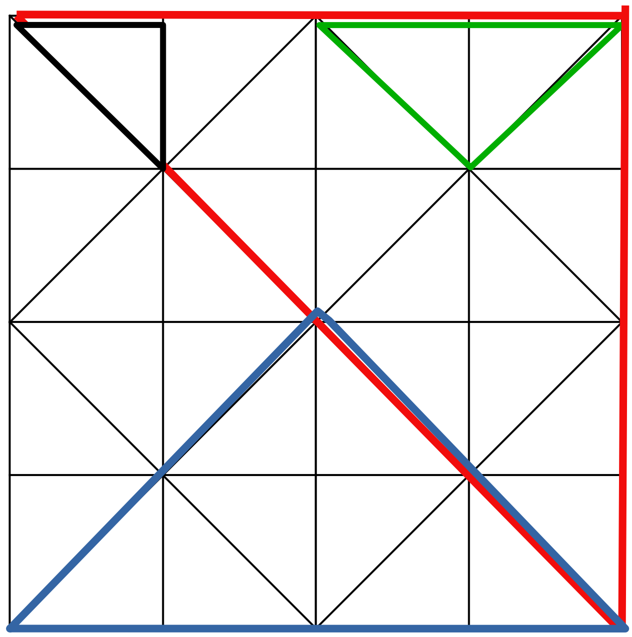
Also: 81 x 3 = 243: Mit einem zusätzlichen Wagestück von 243g kann man dann weiter wiegen bis 121 + 243 = 364.

Versteckte Figuren

1. Einleitung

Wir wollen in der großen Figur unten viele Dreiecke und Quadrate suchen. Wir beginnen mit den Dreiecken. Wir haben zuerst die kleinen, schwarzen Dreiecke gesucht. Als wir fertig waren, war die Summe bei 32. Dann haben wir das gleiche mit den mittelgroßen, großen und sehr großen Dreiecken getan.

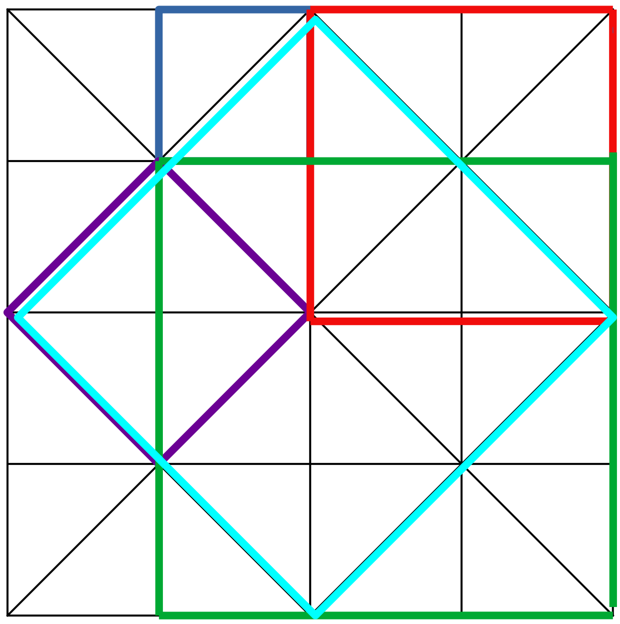
Wie viele Quadrate und wie viele Dreiecke sind in diesem Muster versteckt?



2. Die Anzahl der Dreiecke

Kleine Dreiecke	In der Figur Linienfarbe schwarz	32
Mittelgroße	Grün	24
Große Dreiecke	Blau	8
Sehr große Dreiecke	Rot	4
Summe		68

3. Die Anzahl der Quadrate



Kleine Quadrate	Blau	16
Mittelgroße Quadrate	Lila	4
Große Quadrate	Rot	9
Noch größere Quadrate	Türkis	1
Extrem große Quadrate	Grün	4
Randquadrat		1
Summe		35

Es stecken also viel, viel mehr Dreiecke und Quadrate in der Figur, als man zunächst denkt. Insgesamt haben wir 103 gefunden.