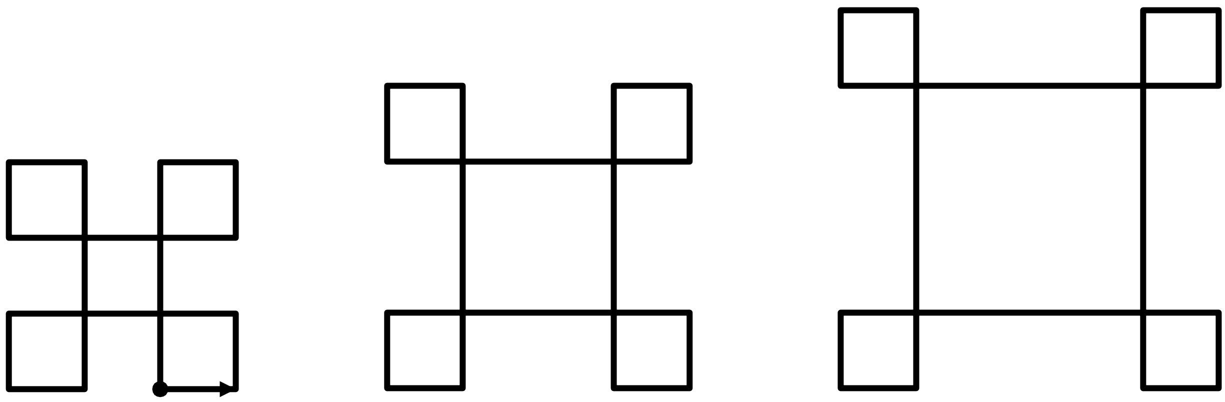
The MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 41 / januar 2018

Liebe MadMax – Freunde,

dieses Mal haben wir drei Themen aus der letzten Ausgabe weiter bearbeitet und neue Ergebnisse erzielt. Außerdem haben wir uns mit dummen Robotern beschäftigt, die Teilbarkeit spezieller Zahlen durch 6 untersucht und Zahlen zerlegt.

Zwei unserer Arbeiten nehmen am Wettbewerb „Schüler experimentieren“ teil. Darauf freuen sich schon Meikel Danielyan, Roman Ries, Anna Zanoth, Axel Jacquet und Kai Seeling.

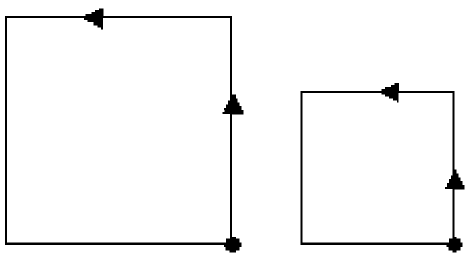
Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

Euer MadMax –Team

Ein dummer Roboter

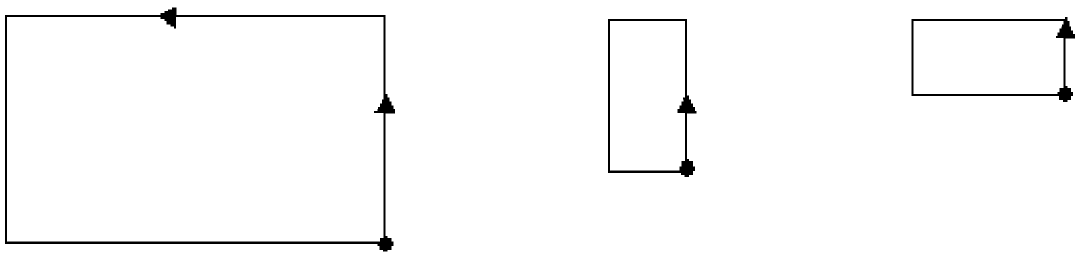
1. Zwei einfache Roboter

Wir haben in der Mathe-AG einen dummen Roboter kennen gelernt. Er kann nur gerade aus laufen und um 90° nach links abbiegen. Zuerst konnte er sich nur eine Zahl merken. Deshalb lief er nur im Quadrat rum:



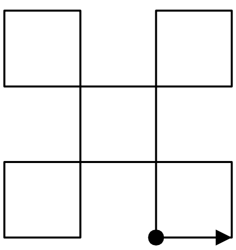
Im ersten Beispiel läuft er immer 3 cm gerade aus, ehe er sich um 90° dreht und dann wieder 3 cm läuft usw., bis er wieder am Startpunkt ankommt. Im zweiten Beispiel läuft er 2 cm, ehe er die Richtung ändert.

Dann hatten wir die Idee, dass sich der Roboter zwei Zahlen merken kann.
Es kommt immer ein Rechteck raus; weil er z.B. bei (3;5) zuerst 3 Schritte gerade aus läuft, dann 5 Schritte links läuft, dann wieder 3 nach links und 5 nach links und dann ist er wieder am Startpunkt angekommen.

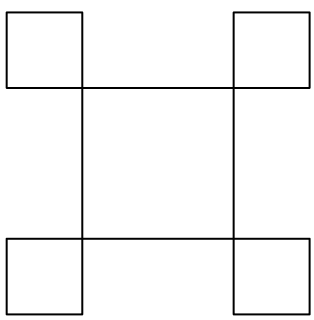


2. Unser Roboter wird schlauer

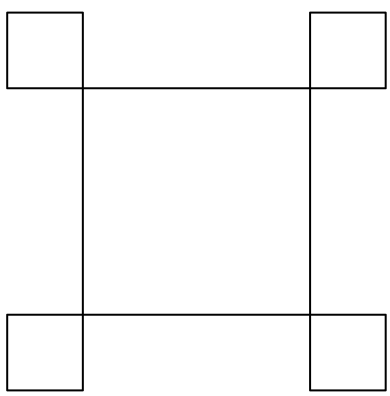
Das war nicht sehr spannend. Deshalb haben wir uns überlegt: „Was passiert wenn er sich drei Zahlen merken kann?“ Das Ergebnis ist ein Windmühle:



(1;1;3)



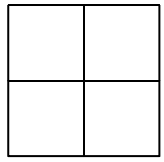
(1;1;4)



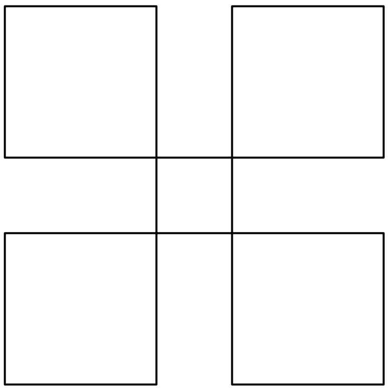
(1;1;5)

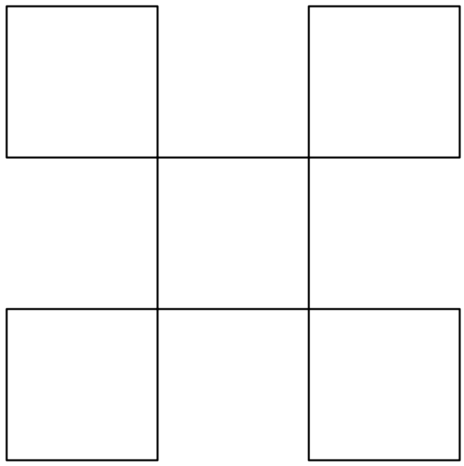
Je größer die letzte Zahl wird, desto größer ist das Quadrat in der Mitte: bei 3 hat es die Seitenlänge 1, bei 4 die Seitenlänge 2 und bei 5 hat es die Länge 3. Allgemein hat es bei n die Seitenlänge n – 2.

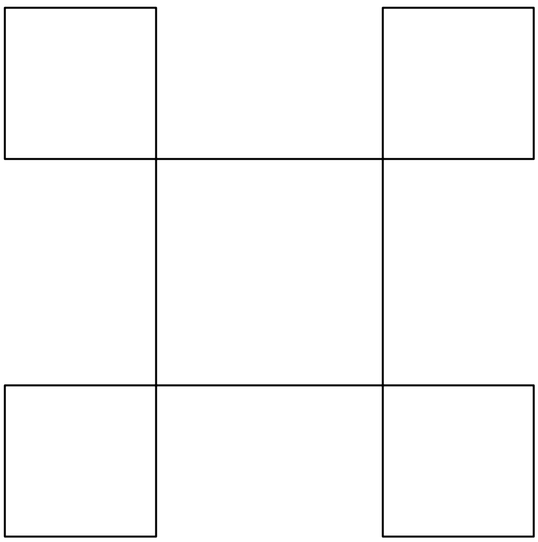
Auch im Sonderfall: (1;1;2) haben wir ein Windrad bekommen, bei dem es aber kein Quadrat in der Mitte gibt. Nach unserer Formel müsste es die Seitenlänge 2 – 2 = 0 haben, was dann ja auch stimmt:



Jetzt haben wir für die ersten beiden Zahlen die 2 gewählt. Bei 225, 226 und 227 sieht man, dass es wieder Windmühlenflügel sind:

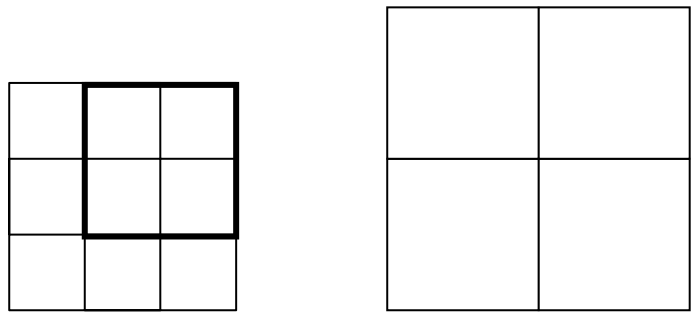






Es kamen wieder Windmühlenflügel heraus, aber mit größeren 2 x 2 – Quadraten in den Ecken. Bei 225 kam in der Mitte ein kleines Quadrat mit Seitenlänge 1 raus. Bei 226 wurde größer, nämlich Seitenlänge 2 usw.. Allgemein hat das Quadrat bei 22n die Seitenlänge n – 4.

Wenn man auch noch die Figuren 223 und 224 zeichnet, sieht das zuerst wieder komisch aus:



Aber auch das sind „Windmühlenflügel: Bei 223 verlaufen die Flügel ineinander (fettes Quadrat) und bei 224 ist das Quadrat innen drin nur ein Punkt.

Fakultäten und Nullen

1. Einleitung

Im Wettbewerb ,,Mathematik ohne Grenzen“ gab es eine Aufgabe in der gefragt wurde, wie viele Nullen die Zahl 2017! hat. Als erstes haben wir uns dann gefragt, was „! = Fakultät“ ist. Unser Lehrer hat es uns erklärt.

Beispiel: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Man muss also 6 mit der 5 multiplizieren und jeder weitere Faktor ist eins kleiner. Wenn man 6! berechnet erhält man 720, also hat 6! eine Null.

Der Taschenrechner kann aber 2017! nicht ausrechnen, weil das Ergebnis zu groß ist. Weil wir so nicht herausfinden können, wie viele Nullen das Ergebnis hat, müssen wir eine andere Methode finden.

2. Systematische Untersuchung der Fakultäten auf Nullen

Bei einem anderen Beispiel sieht man, wann bei der Fakultät am Ende eine Null dazu kommt:

$$13! = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.227.020.800$$

Bei der 5 kommt eine Null dazu, weil man 2x5 rechnen kann und das ergibt 10.

Durch den Faktor 10 kommt noch eine Null dazu, weil die 10 schon selbst eine Null hat.

Deshalb hat 13! insgesamt 2 Nullen am Ende.

Bei 17! kommt noch die 15 vor. Wenn man die mit irgendeiner geraden Zahl aus der Fakultät multipliziert, kommt wieder eine Null dazu. Zum Beispiel: 15x4 = 60 oder 15x6 = 90. Deshalb sind es bei 17! drei Nullen.

Also bei jedem Faktor, der durch 5 teilbar ist kommt eine Null dazu. Denn immer wenn man eine Zahl aus der Fünferreihe mit einer geraden Zahl multipliziert, kommt eine Null dazu. Weil es mehr gerade Zahlen gibt als Zahlen aus der Fünferreihe, gibt es genug gerade Zahlen als Faktor.

3. Unsere Lösung für 2017!

Jetzt haben wir die 2017! untersucht. Da wird es spannend, weil bei Faktoren aus der 25er-Reihe sogar zwei Nullen dazukommen. Man kann nämlich 4x25=100 rechnen und die 25 liefert deshalb zwei Nullen für die Fakultät.

Bei der 125er-Reihe kommen sogar drei Nullen dazu, weil man 8x125=1000 rechnen kann.

Bei den 625er-Reihe kommen vier Nullen dazu, weil man 16x625=10000
Dafür muss man herausfinden, wie viele Zahlen der 5er, 25er, 125er und 625er-Reihe in der Zahl 2017 stecken und ob man für jeden dieser Schritte eine gerade Zahl bzw. eine aus der 4er-, 8er- oder 16er-Reihe als Faktor findet.

Dazu haben wir mit einer Excel-Tabelle gearbeitet. Wir haben die Zahlen aus der 5er Reihe aufgeschrieben und durch die 25, 125 und 625 geteilt. Wenn eine ganze Zahl heraus kam, dann war 25, 125 oder 625 ein Teiler. Dann haben wir die Anzahl Nullen hingeschrieben, die dieser Faktor liefert.
Also bei der 25 eine Null mehr, also insgesamt 2 Nullen.
Bei der 125 kommen 2 zusätzliche Nullen hinzu, insgesamt 3 Nullen.
Und bei 625 kommen 3 zusätzliche Nullen dazu, insgesamt 4 Nullen.

In der folgenden Tabelle (ein Teil von unserer Exceltabelle) kann man das sehen:

	Anz. Nullen	n/25	n/125	n/625	Faktor
5	1	0,2	0,04	0,008	
10	1	0,4	0,08	0,016	
15	1	0,6	0,12	0,024	
20	1	0,8	0,16	0,032	
25	2	1	0,2	0,04	4
30	1	1,2	0,24	0,048	
35	1	1,4	0,28	0,056	
40	1	1,6	0,32	0,064	
45	1	1,8	0,36	0,072	
50	2	2	0,4	0,08	6
…					
120	1	4,8	0,96	0,192	
125	3	5	1	0,2	16
130	1	5,2	1,04	0,208	
135	1	5,4	1,08	0,216	
140	1	5,6	1,12	0,224	
145	1	5,8	1,16	0,232	
150	2	6	1,2	0,24	12
155	1	6,2	1,24	0,248	
…					
230	1	9,2	1,84	0,368	
235	1	9,4	1,88	0,376	
240	1	9,6	1,92	0,384	
245	1	9,8	1,96	0,392	
250	3	10	2	0,4	32
255	1	10,2	2,04	0,408	
260	1	10,4	2,08	0,416	
…					
610	1	24,4	4,88	0,976	
615	1	24,6	4,92	0,984	
620	1	24,8	4,96	0,992	
625	4	25	5	1	96
630	1	25,2	5,04	1,008	
…					
1995	1	79,8	15,96	3,192	
2000	3	80	16	3,2	330
2005	1	80,2	16,04	3,208	
2010	1	80,4	16,08	3,216	
2015	1	80,6	16,12	3,224	
Summe:	**502**				

Die Anzahl der Nullen ist 502 und dieses Ergebnis haben wir mit unseren Überlegungen und der Exceltabelle von oben berechnet. Im Internet haben wir die Zahl 2017! gefunden. Sie war exakt berechnet, war 5792 Ziffern lang und sie hatte wirklich die gleiche Anzahl an Nullen, die wir berechnet haben.

2017 Fakultät

46.912.386.064.968.351.541.233.347.631.123.393.493.937.828.605.771.322.810.665.777.139.805.125.160
125.958.727.366.629.374.869.756.157.190.681.185.741.900.550.396.844.986.750.163.350.034.861.620
842.608.147.619.361.376.390.471.472.715.277.848.537.791.688.113.444.404.115.022.750.279.394.159
910.502.841.579.605.143.910.504.294.750.988.277.712.378.609.077.822.709.890.374.312.867.700.012
895.166.103.836.688.837.516.462.894.123.307.469.568.150.780.426.087.771.182.224.172.590.121.539
808.680.591.898.953.221.040.499.204.352.044.994.283.637.820.088.576.468.447.943.314.774.465.527
003.639.057.024.479.310.499.355.269.903.289.944.906.948.341.261.809.489.700.231.991.728.100.673

950.463.877.934.437.121.823.912.292.191.416.875.091.901.699.971.659.991.052.882.344.446.703.801
….

770.713.781.737.527.713.471.934.640.097.705.318.309.998.141.521.994.885.757.141.859.284.187.203
600.797.928.017.617.570.067.570.974.902.429.230.207.705.567.178.180.139.091.560.718.857.233.194
076.487.769.205.200.105.659.398.922.488.132.751.058.564.990.461.501.431.476.650.521.644.786.481
874.477.213.791.707.466.479.299.363.291.454.352.225.941.066.666.495.522.753.310.702.404.396.730
741.670.999.801.226.446.376.402.844.171.007.742.484.451.828.533.747.331.979.331.467.934.689.835
086.347.216.739.721.468.512.971.398.616.788.610.777.684.812.536.695.442.215.387.648.740.990.031
666.962.869.281.646.996.103.480.658.884.598.912.416.587.721.234.302.385.004.858.973.974.684.898
778.726.899.217.674.035.732.675.037.651.483.774.663.274.541.968.613.142.739.691.138.050.202.433
430.255.950.428.755.369.130.120.786.938.696.531.250.390.758.776.514.539.629.392.577.213.863.185
564.399.899.714.806.751.697.991.033.159.680.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000

https://www.fakultaet.net/berechnung?zahl=2017

Leider können wir selbst so große Fakultäten nicht exakt berechnen, aber wir haben ja eine Methode für die Nullen gefunden.

Da die vorherige Methode mit der Excel-Tabelle zu umständlich war, haben wir aber was Neues versucht. Die Zahl 2017! hat 403 Faktoren, die durch 5 teilbar sind (da 2017 : 5 = 403,4 ist). Das heißt, das Produkt hat auf jeden Fall 403 Nullen am Ende. Da 80 Faktoren sogar durch 25 teilbar sind kommen noch mal 80 Nullen dazu. 16 Faktoren sind teilbar durch 125 und deswegen kommen zusätzlich noch mal 16 Nullen dazu. 3 Faktoren sind teilbar durch 625 deswegen kommen noch mal 3 Nullen dazu. Also muss man 403 + 80 + 16 + 3 rechnen und das Ergebnis ist 502 Nullen wie man ja auch oben in der Excel Tabelle und in der ausgerechneten Fakultät sehen kann.

Bei der Zahl 4444! machen wir es nach dem gleichen Prinzip:
4444! hat 888 Faktoren, die durch 5 teilbar sind. 177 Faktoren sind teilbar durch 25. 35 Faktoren sind teilbar durch 125 und 7 Faktoren sind teilbar durch 625.
Aber 4444! hat auch noch den Faktor 5*5*5*5*5 = 3125. Der bringt auch noch eine Null dazu.
Also muss man 888 + 177 + 35 + 7 + 1 rechnen und das Ergebnis lautet 1108, dass heißt 4444! hat 1108 Nullen.

Auch bei der Zahl 1 234 567! haben wir es nach dem gleichen Prinzip gemacht:
1 234 567! hat 246913 Faktoren, die durch 5 teilbar sind. 49382 Faktoren sind teilbar durch 25. 9876 Faktoren sind teilbar durch 125. 1975 Faktoren sind teilbar durch 625. 395 Faktoren sind teilbar durch 3125.
Aber 1 234 567! hat auch noch den Faktor 5*5*5*5*5*5=15625.
5*5*5*5*5*5*5=78125, durch den 79 Faktoren teilbar sind.

15 Faktoren sind teilbar durch 78125.
5*5*5*5*5*5*5*5=390625
3 Faktoren sind teilbar durch 390625.

1 234 567! hat also 558559 Nullen.

Die Beispiele zeigen, dass man mit dieser Methode die Nullen von jeder Fakultät bestimmen kann. Es gilt:

Anzahl der Nullen = Anzahl der Faktoren, die durch 5 teilbar sind + Anzahl der Faktoren, die durch 25 teilbar sind +   usw.

4. Hat a x n! eine Null mehr am Ende?

Wir untersuchen hier mit welcher Zahl man 13! multiplizieren muss damit das Ergebnis eine Null mehr am Ende hat.

$1 \cdot 13! = 6.227.020.800$

$2 \cdot 13! = 12454041600$

$3 \cdot 13! = 18681062400$

$4 \cdot 13! = 24908083200$

$5 \cdot 13! = 31135104000$ 1 Null mehr

$6 \cdot 13! = 37362124800$

$7 \cdot 13! = 43589145600$

$8 \cdot 13! = 49816166400$

$9 \cdot 13! = 56043187200$

$10 \cdot 13! = 62270208000$ 1 Null mehr

$11 \cdot 13! = 68497228800$

…..

$25 \cdot 13! = 155675520000$ 2 Nullen mehr

…..

$125 \cdot 13! = 778377600000$ 3 Nullen mehr

…..

$625 \cdot 13! = 3891888000000$ 4 Nullen mehr

Wir hatten die Vermutung, dass mit jeder 5 mehr eine Null dazu kommt. Das heißt, wenn man z.B. mit 5^4 multipliziert, dann bekommt man vier Nullen mehr.

Aber bei 7! geht das schief, weil 625 x 7! nur drei Nullen mehr hat, obwohl es wegen 625 = 5*5*5*5 vier mehr sein müssten: Es ist 7! = 5040, aber $625 \cdot 7! = 3150000$ hat nur vier Nullen. Das liegt daran, dass 7! = 7*(2*3)*5*(2*2)*3*2*1 nur 4 Zweien hat und man nur vier Fünfen mit Zweien multiplizieren kann. Eine 2 braucht man für die 5 in 7! Und dann bleiben für die 625 nur noch 3 Zweien übrig.

Es geht bei der 13! schief bei dem Faktor 1953125 (5^9), weil es 10 Zweien gibt und 2 Fünfen in der 13! und deshalb nur noch 8 Zweien für die 9 Fünfen. Also hat a * 13! höchstens 10 Nullen am Ende:

13! = 13*(3*2*2)*11*(2*5)*9*(2*2*2)*7*(2*3)*5*(2*2)*3*2*1
Bei z.B. der 34! sind 17 Faktoren durch 2 teilbar, 8 sogar durch 4, 4 durch 8, 2 durch 16 und 1 sogar durch 32. Deshalb gibt es 32 Zweien und 7 Fünfen. Dann kann man bis a = 5^25 bekommt man noch neue Nullen und dann nicht mehr. So kann man das mit allen Fakultäten machen.

5. Was haben wir gelernt?

Wir haben gelernt, dass man zwar die Fakultäten nicht exakt berechnen kann, aber wir haben eine eigene Methode gefunden, die uns das ermöglicht:

1. Durch die 5, 25, 125 und durch die 625 usw. teilen.

2. Jedes Ergebnis (abgerundet) liefert neue Nullen.

3. Nullen addieren und man hat die Anzahl der Nullen.

Mit einer ähnlichen Methode können wir auch feststellen, wie viele Nullen a * n! höchstens hat, wenn a eine Potenz von 5 ist.

Stammbrüche als Summen von Stammbrüchen (Teil 2)

1. Unser Ausgangsproblem

Im letzten MadMax haben wir uns mit Stammbrüchen beschäftigt. Das sind Brüche mit einer 1 im Zähler. Die Frage war, ob man jeden Stammbruch als Summe von zwei Stammbrüchen schreiben kann und wie man solche Stammbrüche findet.

Allgemein: $\frac{1}{a}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

Für dieses Problem und ähnliche Fragen haben wir ein paar schöne Formeln entdeckt.

2. Ein einfacher Trick

Folgenden Trick hatten wir schon beim letzten Mal vorgestellt:

Beispiel: $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

Allgemein: $\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}$

Bei diesem Trick sind die beiden Stammbrüche natürlich immer gleich.

3. Der um 1 größere Nenner

Nun ändern wir unsere Strategie. Wir wählen den nächst kleineren Stammbruch (d.h. wir erhöhen den Nenner um 1). Wir zeigen nun einen Weg, wie man den Nenner des zweiten Summanden findet.

Zuerst haben wir den zweiten Bruch mit einer Umkehrrechnung identifiziert.

Beispiel: $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

Nun wollen wir herausfinden, ob es eine Formel gibt, mit der man den zweiten Summanden direkt berechnen kann. Dabei ist uns aufgefallen, dass man den Nenner des gesuchten Summanden erhält, wenn man den Nenner des Ausgangsbruches mit dem Nenner des ersten Summanden multipliziert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Allgemein: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a \cdot (a+1)}$

Das kann man beweisen:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a \cdot (a+1)} \\ &= \frac{a}{a \cdot (a+1)} + \frac{1}{a \cdot (a+1)} \\ &= \frac{1+a}{a \cdot (a+1)} \\ &= \frac{1}{a}\end{aligned}$$

4. Kann man den Nenner des ersten Summanden um eine beliebige natürliche Zahl größer machen?

Mit den beiden Formeln aus den Kapiteln 2 und 3 können wir jeden Stammbruch auf zwei Arten als Summe von zwei Stammbrüchen schreiben. Wir haben jetzt untersucht, ob es noch mehr Möglichkeiten gibt, indem man zum Beispiel zum Nenner des ersten Summanden auch andere natürliche Zahlen addiert.

Dies funktioniert nach dem folgenden Prinzip:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a \cdot (a+2)/2}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a \cdot (a+3)/3}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a \cdot (a+4)/4}$$

Wir zeigen, dass man die Formel verallgemeinern kann:

$$\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a \cdot (a+n)/n}$$
$$= \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a \cdot (a+n)/n} \cdot \frac{n}{n}$$
$$= \frac{1}{a+n} + \frac{n}{a \cdot (a+n)}$$
$$= \frac{1}{a+n} \cdot \frac{a}{a} + \frac{n}{a \cdot (a+n)}$$
$$= \frac{a}{a \cdot (a+n)} + \frac{n}{a \cdot (a+n)}$$
$$= \frac{1 \cdot (a+n)}{a \cdot (a+n)}$$
$$= \frac{1}{a}$$

Jedoch muss der Nenner a des Ausgangsbruches durch die Zahl n teilbar sein.
Für Primzahlen bedeutet das, dass man als Zahl n nur die Eins und die Zahl selbst nutzen kann.

Hier alle Möglichkeiten für den Nenner 12:

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12+1} + \frac{1}{12 \cdot (12+1)} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12+2} + \frac{1}{12 \cdot (12+2)/2} = \frac{1}{14} + \frac{1}{84}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12+3} + \frac{1}{12 \cdot (12+3)/3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{60}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12+4} + \frac{1}{12 \cdot (12+4)/4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12+6} + \frac{1}{12 \cdot (12+6)/6} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12+12} + \frac{1}{12 \cdot (12+12)/12} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24}$$

Mit dieser Methode kann man 1/12 also auf 6 verschiedene Arten als Summe zweier Stammbrüche schreiben. Dies liegt daran, dass die Zahl 12 nur sechs Teiler hat, bei denen das Ergebnis eine ganze Zahl ist. Außerdem ist der größere Nenner ein Vielfaches von dem kleineren und zwar a/n-mal so groß.

Andere Beispiele:

Der Nenner 42 hat z.B. den Teiler 7, also: $\frac{1}{42} = \frac{1}{42+7} + \frac{1}{42 \cdot (42+7)/7}$

Die 78 hat die Teiler 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39 und 78. Also gibt es 8 Möglichkeiten nach dieser Methode.

Bei den Zahlen von Eins bis Hundert erreichen wir als höchste Anzahl an Teilern die Anzahl Zwölf (die niedrigste Anzahl ist 2 bei Primzahlen(und bei Eins und Null sind es Ausnahmen mit einem und Unendlich vielen Teilern)). Also kann man bei diesen Zahlen von 1 bis 100 bis zu 12 Möglichkeiten der Zerteilung in Stammbrüche feststellen.

Quelle Teilermengen: http://www.bergziege-owl.de/category/geocaching-in-owl/

5. Eine andere Idee

Nun haben wir uns Gedanken gemacht, wie es noch gehen könnte. Die Idee war, den Stammbruch mit 1/3 und 2/3 zu multiplizieren und dann zu addieren. Also haben wir einige Beispiele gemacht. Dies lief folgendermaßen ab:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15}$$

Dabei ist uns aufgefallen, dass der Nenner des Ausgangsbruches gerade sein muss, damit zwei Stammbrüche entstehen können. Das ist aber klar, weil bei einer Multiplikation von zwei Brüchen gilt: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner. Wenn man nun einen Ausgangsbruch, bei dem der Nenner ungerade ist mit zwei drittel multipliziert, kann kein Stammbruch herauskommen, da man den Zähler nicht mit dem Nenner zu einer 1 kürzen kann.

Nun haben wir dieses Verfahren mit 1/4 und 3/4 angewendet:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}$$
$$\frac{1}{5}=\frac{1}{20}+\frac{3}{20}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}$$

Jetzt ist uns allerdings aufgefallen, dass wir unsere vorherige Behauptung überdenken müssen. Richtig ist es zu sagen, dass der Nenner des Ausgangsbruches durch den Zähler des 2.Faktors des 2.Summanden teilbar sein muss.

Formel für 1/3 und 2/3:

$$\frac{1}{a}=(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{3})+(\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{3})=\frac{1}{3a}+\frac{2}{3a}=\frac{3}{3a}=\frac{1}{a}$$

Allgemein:

$$\frac{1}{a}=(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x})+(\frac{1}{a}\cdot\frac{x-1}{x})=\frac{1}{ax}+\frac{x-1}{ax}=\frac{x+1-1}{ax}=\frac{x}{ax}=\frac{1}{a}$$

Der Nenner a des Stammbruches muss durch x-1 teilbar sein. Wir haben für 1/12 alle Möglichkeiten überprüft:

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{48}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{60}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{7}=\frac{1}{84}+\frac{1}{14}$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13}+\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{13}=\frac{1}{156}+\frac{1}{13}$$

Diese Methode bringt keine anderen Ergebnisse als die Erste.

Warum das so ist, haben wir dann untersucht.

Methode 1: $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a\cdot(a+n)\cdot\frac{1}{n}}$ und n muss ein Teiler von a sein.

Methode 2: $\frac{1}{a}=\frac{1}{ax}+\frac{x-1}{ax}$ und x-1 muss ein Teiler von a sein.

Wenn bei beiden Methoden die Teiler von a benötigt werden, heißt das auch, dass für beide Methoden dieselben Voraussetzungen herrschen. Somit könnte unsere Vermutung stimmen. Zumindest liefern beide Methoden gleich viele Ergebnisse.

Wenn beide Methoden wirklich gleich sein sollen, dann muss in der Formel 2 das x eigentlich das $a\cdot(a+n)\cdot\frac{1}{n}$ in Formel 1 sein. Deshalb haben wir den Term in die Formel 2 eingesetzt:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{ax}+\frac{x-1}{ax}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a\cdot(a+n)\cdot\frac{1}{n}}+\frac{(a+n)\cdot\frac{1}{n}-1}{a\cdot(a+n)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a\cdot(a+n)\cdot\frac{1}{n}}+\frac{\frac{1}{n}((a+n)-n)}{a(a+n)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a\cdot(a+n)\cdot\frac{1}{n}}+\frac{a+n-n}{a(a+n)}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a\cdot(a+n)\cdot\frac{1}{n}}+\frac{a}{a(a+n)}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a \cdot (a+n) \cdot \frac{1}{n}} + \frac{1}{a+n}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a \cdot (a+n) \cdot \frac{1}{n}}$$

Also war unsere Vermutung richtig.

6. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Wir haben also damit festgestellt, dass es nach unseren Ergebnissen nur eine begrenzte Anzahl an Möglichkeiten der Zerteilung in zwei andere Stammbrüche gibt. Diese Menge hängt von der Anzahl der natürlichen Teiler von a ab. Es gibt nach unseren Methoden nur so viele Möglichkeiten der Zerteilung, wie der Nenner des Ausgangsbruches Teiler hat.

Wir haben uns gefragt, ob es nach einer anderen Methode noch mehr geben könnte?

Durch eine Versuchsreihe sind wir zu dem Ergebnis gekommen, dass es doch mehr Möglichkeiten gibt, als wir zuerst angenommen haben wie z.B., dass es ebenfalls bei 1/12 = 1/(12+8) + 1/30 funktioniert. Dies hätten wir nicht erwartet, da 12 nicht durch 8 teilbar ist. Auch ist 12 nicht durch 9 teilbar, aber: (1/12=1/(12+9) + 1/ 12*(12+9)=1/21 +1/28.

Deshalb haben wir uns Methode 1 noch mal genauer angesehen und einen Denkfehler gefunden:

Methode 1: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a \cdot (a+n) \cdot \frac{1}{n}}$ und n muss ein Teiler von a sein.

Es muss heißen: … und n muss ein Teiler von $a \cdot (a+n)$ sein. Wir dachten, dass n dann auch ein Teiler von a oder a+n sein muss. Das stimmt aber nicht: 8 ist kein Teiler von 12 und auch kein Teiler von 20, aber ein Teiler von $12 \cdot 20 = 240$ und das reicht.

Bei der weiteren Untersuchung des Stammbruchs 1/12 haben wir dann noch alle fehlenden Werte für n getestet und folgende Ergebnisse erhalten:

5: 5 ist kein Teiler von 12 und nicht von 17. Wenn man ihre Primfaktoren untersucht stellt man fest, dass sich die 5 weder in der 12, noch in der 17 zusammenstellen kann.
Dies wäre erfolgt, wenn sich alle Primfaktoren der 5 (also 1 und 5) in der 12 (3*2*2) und der 17 (1*17) wiederfinden ließen.

7: 7 ist kein Teiler von 12 und auch nicht von 19 und auch nicht von 12*19 = 228.
10 = 2*5: Der Primfaktor 5 ist wieder kein Teiler von 12 und 22 und ebenfalls nicht Teiler von 12*22 = 264.

11: Der Primfaktor 11 ist kein Teiler von 12 und 23, auch keiner von 12*23 = 276.
Damit haben wir alle Möglichkeiten für den Bruch 1/12. Es sind acht.

Um zu ermitteln, wie viele Möglichkeiten es maximal geben kann, haben wir uns erst einmal am Beispiel von 1/8 versucht. Wir haben den Nenner verdoppelt, da 1/2a+1/2a die Summe ist, bei der beide Brüche den gleichen Nenner haben. Von 1/16 haben wir dann den Nenner des ersten Bruchs bis 1/9 jeweils um 1 verkleinert (1/8 geht nicht, weil dann $\frac{1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{\infty}$ sein müsste, da es keinen Stammbruch gibt, der den Wert Null hat). Nun haben wir die Brüche von 1/16 bis 1/9 gezählt und sind zum Schluss gekommen, dass die maximale Anzahl der Möglichkeiten schon im Nenner steht, in unserem Beispiel 8.

Das gilt auch allgemein: Bei 1/a gibt es maximal a Möglichkeiten.

7. Fazit

Zurückblickend haben wir sehr vieles über das Arbeiten an einem solchen mathematischen Projekt erfahren. Zum Beispiel kann man zwar zunächst mit sehr einfachen Frage beginnen („Kann man den Bruch 1/2 als Summe von zwei Stammbrüchen schreiben?“, welche sich dann aber immer weiter und weiter entwickeln und sich irgendwann zu neuen und komplizierteren Erkenntnissen hochspielen (wie hier in unserer Arbeit zunächst eine erste Formel und dann eine zweite). Dann hat man das Gefühl, dass man wirklich vorankommt. Selbst wenn man einsehen muss, dass vielleicht mehrere Sachen (ich spreche hier von den beiden Formeln, die dann doch dieselben waren) eine sind, was allerdings mathematisch eher positiv zu betrachten ist, da man dann dort Verbindungen erkennen kann. So lernt man auch, dass einem dann doch immer Fehler unterlaufen können. Die Kunst ist es dann die Fehler ins Positive zu wenden, wobei man sagen kann, dass wir zu unserem Glück unseren Denkfehler gefunden und behoben haben und sogar etwas aus ihm gewonnen haben. Dabei ist es aber natürlich immer am wichtigsten, Spaß am Arbeiten zu haben, um die optimalen Ergebnisse zu bekommen. Denn wo arbeiten wir lieber, als da wo es uns Spaß macht.

Summen von Primzahlen

1. Das Problem

Wir wissen, dass Primzahlen nur durch 1 und durch sich selber teilbar sind.

Frage: kann man natürliche Zahlen als Summe von zwei Primzahlen schreiben?
Zum Beispiel: 7 = 2 + 5,
aber bei 11 oder 17 geht es nicht. Bei den ungeraden geht es also manchmal, aber nicht immer. Wie sieht es bei den geraden natürlichen Zahlen aus? Das hatte Fynn Decker im letzten MadMax untersucht und folgende Tabelle erstellt:

4 = 2 + 2	40 = 3 + 37	76 = 3 + 73
6 = 3 + 3	42 = 5 + 37	78 = 5 + 67
8 = 3 + 5	44 = 3 + 41	80 = 7 + 73
10 = 3 + 7	46 = 3 + 43	82 = 3 + 73
12 = 5 + 7	48 = 7+ 41	84 = 5 + 79
14 = 3 + 11	50 = 3 + 47	86 = 2 + 84
16 = 3 + 13	52 = 5 + 47	88 = 5 + 83
18 = 5 + 13	54 = 7 + 47	90 = 7 + 83
20 = 3 + 17	56 = 3 + 53	92 = 3 + 89
22 = 3 + 19	58 = 5 + 53	94 = 3 + 91
24 = 5 + 19	60 = 7 + 53	96 = 5 + 91
26 = 3 + 23	62 = 3 + 59	98 = 7 + 91
28 = 5 + 23;	64 = 3 + 61	100 = 3 + 97
30 = 7 + 23	66 = 5 + 61	
32 = 3 + 29	68 = 7 + 61	
34 = 3 + 31	70 = 3 + 67	
36 = 5 + 31	72 = 5 + 67	
38 = 7 + 31	74 = 3 + 71	

Ergebnis: Alle geraden Zahlen bis 100 kann man als Summe von zwei Primzahlen schreiben. Wir haben das noch weiter untersucht:

Dabei ist uns aufgefallen, dass die Primzahl 2 nur im ersten Beispiel vorkommt. Das liegt daran, weil die Summe aus 2 und einer anderen Primzahl ungerade ist und wir nur gerade Zahlen untersucht haben. Alle anderen Primzahlen sind nämlich ungerade. Deshalb kann man eine ungerade Zahl auch nur dann als Summe von zwei Primzahlen schreiben, wenn sie genau 2 größer ist als eine Primzahl: **2+3=5, 2+5=7,** 2+7=9, **2+11=13,** 2+13=15, **2+17=19,** 2+19=21, …
Manchmal kommen dann sogar wieder Primzahlen raus (fett).

Bei vielen Zahlen kann man die 3 als Summand verwenden. Wenn es für eine Zahl n gehen soll, dann muss n – 3 eine Primzahl sein. Genauso ist es mit der 5 oder 7. Bei der Zahl 18 kann man mit der 3 nicht die 18 erhalten, weil 18 – 3 = 15 ist und 15 ist keine Primzahl. Aber 18 = 5 + 13 geht. So ähnlich ist es mit der 68. Hier sind 68 – 3 = 65 und 68 – 5 = 63 keine Primzahlen, aber 68 = 7 + 61 geht.

3. Zahlen als Summen von drei Primzahlen

Wir haben uns gefragt ob wir mit drei Primzahlen die Zahlen von 1 bis 100 bilden können. Folgende Beispiele zeigen, das es bei vielen Zahlen geht: 7=3+2+2, 10= 5+3+2 und 31=23+7+2. Wir untersuchen jetzt alle Zahlen von 1 bis 100.

6=2+2+2	31=23+5+3	56=47+7+2	81=73+5+3
7=3+2+2	32=23+7+2	57=47+7+3	82=73+7+2
8=3+3+2	33=23+5+5	58=53+3+3	83=73+5+5
9=5+2+2	34=29+3+2	59=53+3+3	84=79+3+2
10=5+3+2	35=29+3+3	60=53+5+2	85=79+3+3
11=7+2+2	36=29+3+3	61=53+5+3	86=79+3+3
12=7+3+2	37=29+5+3	62=53+7+2	87=79+5+3
13=7+3+3	38=29+7+2	63=53+7+3	88=83+3+2
14=7+5+2	39=29+5+5	64=59+3+2	89=83+3+3
15=11+2+2	40=31+7+2	65=53+7+5	90=83+5+2
16=11+3+2	41=37+2+2	66=61+3+2	91=83+5+3
17=11+3+3	42=37+3+2	67=53+7+7	92=83+7+2
18=13+3+2	43=37+2+2	68=61+5+2	93=89+2+2
19=13+3+3	44=37+2+2	69=61+5 3	94=89+3+2
20=13+5+2	45=41+2+2	70=61+7+2	95=91+2+2
21=7+7+7	46=41+3+2	71=67+2+2	96=91+3+2
22=17+3+2	47=41+3+3	72=67+3+2	97=91+3+3
23=17+3+3	48=43+3+2	73=67+3+3	98=91+5+2
24=17+5+2	49=43+3+3	74=67+5+2	99=91+5+3
25=17+5+2	50=43+5+2	75=67+5+3	100=91+7+2
26=17+7+2	51=47+2+2	76=71+3+2	
27=17+5+5	52=47+3+2	77=71+3+3	
28=23+3+2	53=47+3+3	78=73+3+2	
29=19+5+5	54=47+5+2	79=73+3+3	
30=23+5+2	55=47+5+3	80=73+5+2	

Das geht immer, weil man eine ungerade Zahl immer als 3 + gerade Zahl schreiben kann. Und die kann man als Summe a + b von zwei Primzahlen schreiben. Unsere ungerade Zahl ist also gleich 3 + a + b. Bei einer geraden Zahl geht es so ähnlich, weil man sie immer als 2 + gerade Zahl schreiben kann.

Teilbarkeit spezieller Zahlen durch 6

1. Wann ist eine natürliche Zahl durch 6 teilbar?

Eine natürliche Zahl ist durch 6 teilbar, wenn man die Zahl durch 2 und 3 teilen kann, denn 2 mal 3 ergibt 6. Man kann eine Zahl durch 2 teilen wenn die letzte Zahl gerade ist. Bei der 3 ist das so, dass wenn die Quersumme durch 3 geteilt werden kann dann auch die Zahl.

Division durch 2:	936	die sechs ist gerade also ist die Rechnung möglich.
	285	die fünf ist nicht gerade also ist die Rechnung nicht möglich
Division durch 3: .	936	die Quersumme der Zahl ist 18. 18 kann man durch 3 teilen also ist die Rechnung möglich.
	285	die Quersumme der Zahl ist 15. 15 kann man durch 3 teilen.

Ergebnis: Beide Zahlen sind durch 3 teilbar aber nur die 936 kann man auch durch 2 teilen. Die 936 ist durch 6 teilbar und die 285 nicht.

2. Für welche Ziffern b sind die Zahlen 5b, 5bb, 5bbb usw. durch 6 teilbar?

Wir müssen nur gerade Zahlen untersuchen, weil alle ungeraden Zahlen nicht durch 6 teilbar sind.

2.1 Untersuchung von Zahlen der Form 5b

5b	Untersuchung	teilbar
52	5 plus 2 ergibt 7 und 7 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet: die 52 ist nicht durch 3 und nicht durch 6 teilbar.	nein
54	5 plus 4 ergibt 9 und 9 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 54 ist durch 6 teilbar.	ja
56	5 plus 6 ergibt 11 und 11 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 56 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
58	5 plus 8 ergibt 13 und 13 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 58 ist nicht durch 6 teilbar.	nein

Ergebnis: Nur eine dieser Zahlen ist durch 6 teilbar und zwar die 54. Bei allen anderen ist die Quersumme nicht durch 3 teilbar.

2.2 Untersuchung von Zahlen der Form 5bb

5bb	Untersuchung	teilbar
522	5 plus 2 plus 2 ergibt 9 und 9 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 522 ist durch 6 teilbar.	ja
544	5 plus 4 plus 4 ergibt 13 und 13 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 544 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
566	5 plus 6 plus 6 ergibt 17 und 17 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 566 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
588	5 plus 8 plus 8 ergibt 21 und 21 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 588 ist durch 6 teilbar.	ja

Hier sind zwei Zahlen durch 6 teilbar: 522 und 588.

2.3 Untersuchung von Zahlen der Form 5bbb

5bbb	Untersuchung	teilbar
5222	5 plus 2 plus 2 plus2 ergibt 11 und 11 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 52222 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
5444	5 plus 4 plus 4 plus 4 ergibt 17 und 17 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5444 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
5666	5 plus 6 plus 6 plus 6 ergibt 23 und 23 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5666 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
5888	5 plus 8 plus 8 plus 8 ergibt 29 und 29 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5888 ist nicht durch 6 teilbar.	nein

Hier ist sogar keine Zahl durch 6 teilbar.

2.4 Untersuchung von Zahlen der Form 5bbbb

5bbbb	Untersuchung	teilbar
52222	5 plus 2 plus 2 plus 2 plus 2 ergibt 13 und 13 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 52222 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
54444	5 plus 4 plus 4 plus 4 plus 4 ergibt 21 und 12 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 54444 ist durch 6 teilbar.	ja
56666	5 plus 6 plus 6 plus 6 plus 6 ergibt 29 und 29 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 56666 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
58888	5 plus 8 plus 8 plus 8 plus 8 ergibt 37 und 37 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 58888 ist nicht durch 6 teilbar.	nein

2.5 Wie geht es weiter?

Die Zahlen 54, 54 444 sind durch 6 teilbar. Vermutung: 54 444 444 geht wieder, weil dann zu der Quersumme 21 = 5 plus 4 plus 4 plus 4 plus 4 von 54444 noch mal 4 plus 4 plus 4, also 3 x 4 dazu kommt. Das bedeutet die 54 444 444 ist wieder durch drei und dann auch durch 6 teilbar. Wenn man noch mal 3 Vieren dranhängt dann ist die Division wieder möglich usw.

Die Zahl 522 ist durch 6 teilbar. Vermutung: 522 222 geht wieder, weil dann zu der Quersumme 9 = 5 plus 2 plus 2 von 522 noch mal 2 plus 2 plus 2, also 3 x 2 dazu kommt. Das bedeutet die 522 222 ist wieder durch 3 und dann auch durch 6 teilbar. Wenn man noch mal 3 Zweien dranhängt, dann ist die Division wieder möglich usw.

Die Zahl 588 ist durch 6 teilbar. Vermutung: 588 888 geht wieder, weil dann zu der Quersumme 21 = 5 plus 8 plus 8 von 588 noch mal 8 plus 8 plus 8, also 3 mal 8 dazu kommt. Das bedeutet die 588 888 ist wieder durch 3 und auch durch 6 teilbar. Wenn man noch mal 3 Achten dranhängt, dann ist die Division wieder möglich usw.

566…66 geht garantiert nie weil immer 6 dazu kommen. Die 6 besteht aus 2 Dreien. Wenn zu einer Zahl die sich nicht durch 6 teilen lässt 3 hinzu fügt, kann man sie nicht durch 3 teilen. Da man 2 Dreien hinzu fügt wird es nie gehen.

3. Für welche Ziffern a und b sind die Zahlen 5ab, 5abab usw. durch 6 teilbar?

51212…	Untersuchung	teilbar
512	5 plus 1 plus 2 ergibt 8 und 8 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 512 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
51212	5 plus 1 plus 2 plus 1 plus 2 ergibt 11 und 11 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 51212 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
5121212	5 plus 1 plus 2 plus 1 plus 2 plus 1 plus 2 ergibt 14 und 14 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5121212 ist nicht durch 6 teilbar.	nein

Erklärung: Bei 5121…21212 kommt zur 5 immer 12 dazu, das heißt, immer ein Vielfaches von 3. Deshalb kann 5121…21212 nie durch 3 teilbar sein.

Etwas komplizierter ist es bei 51616…1616.

516	5 plus 1 plus 6 ergibt 12 und 12 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 516 ist durch 6 teilbar.	ja
51616	5 plus 1 plus 6 plus 1 plus 6 ergibt 19 und 19 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 51616 ist nicht durch 6 teilbar.	nein

5161616	5 plus 1plus 6 plus 1 plus 6 plus 1 plus 6 ergibt 26 und 26 ist nicht durch 3 teilbar. Das bedeutet die 5161616 ist nicht durch 6 teilbar.	nein
516161616	5 plus 1 plus 6 plus 1 plus 6 plus 1 plus 6 plus 1 plus 6 ergibt 33 und 33 ist durch 3 teilbar. Das bedeutet die 516161616 ist wieder durch 6 teilbar.	ja

Das heißt, jede dritte dieser Zahlen ist durch 6 teilbar, weil dann immer 3x7=21 dazugekommen ist. Ähnlich ist es bei 51414…1414.

Aber bei 518181818… kommt immer 9 dazu und dann geht es nie.

Zahlen zerlegen

1. Unser Problem

Wir sollten die Zahl 2 581 954 376 so in drei Zahlen zerlegen, dass die Summe am kleinsten wird. Zum Beispiel ist 25 + 8195 + 3764 nicht die kleinstmögliche Summe, weil da zwei Summanden Tausender sind.

Wir versuchen es mit nur einem Tausender. Da gibt es drei Möglichkeiten:

Beispiel 1: 2581954376

258+195+3764= 4217
258+1953+764=1175
2581+ 953+764=4298

Jetzt schauen wir, was die kleinste Lösung ist. Es ist die zweite Zerlegung, nämlich die mit der 1175.

Es ist also anscheinend schlau, die Zerlegung mit dem kleinsten Tausender zu nehmen.

Wir haben das noch mit zwei weiteren Beispielen mit anderen zehnstelligen Zahlen probiert:

Beispiel 2: 9875895492

9875+895+492=11262
987+5895+492=7374
987+589+5492=**7068**

Hier sind das zweite und das dritte Ergebnis deutlich kleiner als das erste, weil die Tausender kleiner sind. Sie sind aber beide gleich. Deshalb muss man einfach beide Summen berechnen und vergleichen.

Beispiel 3: 8658650376

8658+650+376=9684
865+8650+376=9891
865+865+0376=**2106**

Hier ist die letzte Summe die kleinste Zahl wegen den 0 Tausendern.

2. Gibt es eine Regel für die Zerlegung von Zahlen in möglichst kleine Summen mit drei Summanden?

Wir haben jetzt auch Zahlen mit einer anderen Zahl von Stellen untersucht und nach einer allgemeinen Regel gesucht.

Wenn man eine dreistellige Zahl in drei Summanden zerlegen will, hat man nur eine Möglichkeit.

Beispiel: 475 kann man nur in die einzelnen Ziffern 4, 7 und 5 zerlegen und deshalb ist 4+7+5 =16 schon die kleinste Summe.

Wenn man eine vierstellige Zahl hat, dann muss man gucken, wo der kleinste Zehner steht.

Beispiel: 4756
47+5+6=**58**
4+75+6=95
4+7+56=67

Beispiel: 59739
59+73+9=141
59+7+39=105
5+97+39=141

Hier ist die Summe der Zehner im zweiten Beispiel am kleinsten.

Wir vermuten, dass man folgende Regeln beachten muss:

1. Die Summanden sollen sich höchstens um eine Stelle unterscheiden. Das heißt z.B. für 7-stellige Zahlen, dass zwei Summanden zweistellig sein müssen und einer dreistellig.
2. Die erste Stelle der Summanden mit der größeren Stellenzahl soll möglichst klein sein.

Wer Lust hat, kann das ja noch weiter untersuchen.