The MadMax

1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	1	0
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0

zeitung für mathematik am mpg trier / heft 36 / juli 2015

Liebe MadMax – Freunde,

mit unserem Heft Nummer 100100_2 möchten wir euch wieder mit mathematischen Spezialitäten erfreuen. In der Ameisenparade zeigt Ronja, wie man ein scheinbar kompliziertes Problem durch einen genialen Gedanken lösen kann. Maximilian und Linus haben sich mit den Produkten der Ziffern einer Zahl befasst und haben ihr Problem mit Hilfe von Excel untersucht. Henry, Nadja und Zoe haben sich mit dem Lieblingsspielzeug der Jugendlichen beschäftigt und wollten wissen, auf wie viele Arten man zum Beispiel 5 Nachrichten auf 5 Chats verteilen kann. Mariano, Jakob und Justin haben mit einem mathematischen Modell untersucht, welchen Einfluss die Dichte des Bodens auf die Gefährdung des Grundwassers hat. Auch Felix Drießler und Moritz Ditter haben ein interessantes Thema bearbeitet, bei dem sie die soziale Entwicklung in Stadtvierteln untersuchen. Sie sind noch mitten in der Arbeit und werden ihre Ergebnisse im nächsten Heft vorstellen.

Viel Spaß beim Lesen und Mitdenken

Euer MadMax –Team

Die Ameisenparade

1. Fallende Ameisen

Ameisen laufen auf einem Tisch. In diesem Fall werden die Ameisen durch kleine Kästchen mit Zahlen dargestellt, die zeigen, in welche Richtung sie gerade laufen. Bei meinen Beispielen heißt +1, dass die Ameise nach rechts geht und -1 heißt, sie geht nach links. Wenn die Ameisen aufeinander stoßen ändern, sie automatisch die Richtung, weil sie aufeinander prallen. Die Frage ist, nach viel Schritten alle Ameisen rechts oder links vom Tisch gefallen sind.

Beispiel mit zwei Ameisen:

	+ 1				-1		
		+1		-1			
		- 1		+1			
	-1				+1		
-1						+1	
							+1

Es dauert insgesamt nicht sehr lange bis die letzte unten ist. In diesem Fall dauert es 5 Schritte, bis die erste fällt und 6 bis gar keine Ameise mehr auf dem Tisch ist.

2. Umkehrregeln

Dabei gelten folgende Umkehrregeln:

1. Wenn die zwei Ameisen zwei Kästchen von einander entfernt sind und im nächsten Schritt dann gegenüber stehen ändern sie die Richtung direkt. Und gehen dann beim nächsten mal einen Schritt in ihre neue Richtung weiter.

					+1			-1					
						-1	+1						
					-1			+1					

2. Wenn zwei Ameisen sich gegenüberstehen, aneinander vorbei müssen und ein Kästchen von einander entfernt sind prallen sie aneinander ab und stehen dann genau da wo sie waren, nur das sie jetzt in eine andere Richtung gehen.

					+1		-1						
					-1		+1						
				-1				+1					

3. Wenn sie am Anfang aneinander stehen, sind sie im nächsten Schritt zwei Kästchen von einander entfernt und haben die Richtung geändert.

					+1	-1							
				-1			+1						
			-1					+1					

3. Mehr Ameisen

Jetzt untersuche ich ein Beispiel mit drei Ameisen:

+1					+1								-1
	+1					+1						-1	
		+1					+1				-1		
			+1					+1		-1			
				+1				-1		+1			
					+1		-1				+1		
					-1		+1					+1	
				-1				+1					+1
			-1						+1				
		-1								+1			
	-1										+1		
-1												+1	
													+1

Bis gar keine Ameisen auf dem Tisch laufen, sind es 13 Schritte.

Jetzt ein Beispiel mit 6 Ameisen:

	+1			-1	+1		-1			+1		-1	
		-1	+1		-1		+1			-1		+1	
	-1		-1		+1			-1	+1				+1
-1		-1				-1	+1			+1			
	-1							+1			+1		
-1									+1			+1	
										+1			+1
											+1		
												+1	
													+1

4. Eine verblüffende Lösung

Wie lange es dauert, bis alle Ameisen vom Tisch sind, kann man ganz einfach lösen, wenn man sich die Stellen, wo die Ameisen umkehren genauer anschaut.

				+1					**-1**				
					+1			**-1**					
						+1	**-1**						
						-1	**+1**						
					-1			**+1**					

In der dritten Zeile treffen die Ameisen aufeinander und ändern direkt ihre Richtung. Damit man besser sieht, was wirklich beim Aufeinandertreffen passiert, habe ich diesen Schritt in zwei Schritte zerlegt.

Man könnte aber auch meinen, dass die rote Ameise einfach weiterläuft:

				+1					**-1**				
					+1			**-1**					
						+1	**-1**						
						-1	**+1**						
					-1			**+1**					

Es sieht so aus, als ob die Ameisen beim Aufeinandertreffen nicht umkehren, sondern dass die Ameisen aneinander vorbeilaufen.

Hier sieht man das wenn eine Ameise auf dem Tisch ist braucht sie so viele Schritte bis sie runter fällt wie sie vom Tischrand entfernt ist.

								+1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
									+1				
										+1			
											+1		
												+1	
													+1

Die Ameise geht nach rechts und ist 6 Schritte vom Tischrand entfernt. Das heißt (wenn man die Anfangsposition nicht mit zählt) braucht die Ameise 5 Schritte bis sie am Rand steht und noch ein Schritt bis sie endgültig runter fällt. Also braucht sie insgesamt 6 Schritte bis sie runter fällt.

In meinen Beispielen geht es meistens etwas schneller. Das liegt daran, wie zwei Ameisen, die nur einen Schritt voneinander entfernt, sich voneinander abstoßen.

Ziffernprodukte

1. Einleitung

In unserem Thema geht es um Zahlen, bei denen man die einzelnen Ziffern in den Zahlen multipliziert und in dem Produkt die Ziffern noch mal multipliziert. Das geht so lange weiter, bis man eine einstellige Zahl erreicht.

Beispiele:

59	5*9	45
45	4*5	20
20	2*0	0

23	2*3	6

Wir wollen herausfinden, ob es Zahlen gibt, die eine lange Reihe haben, bis das Produkt einstellig wird und wie das ist, wenn man die Ziffern von dreistelligen Zahlen oder von mehrstelligen Zahlen multipliziert.

2. Einstellige Zahlen

Bei den einstelligen Zahlen ist die Aufgabe sinnlos, weil man kein Produkt bilden kann.

3. Zweistellige Zahlen

Bei vielen zweistelligen Zahlen sieht man direkt, dass man schon nach einem Schritt bei einem einstelligen Produkt landet. Diese Zahlen verwerfen wir sofort.

3.1 Verwerfbare Zahlen

Alle zweistelligen Zahlen mit einer 1 oder 0 kann man sofort verwerfen, da eine Ziffer, multipliziert mit der 1oder 0, immer eine einstellige Zahl ergibt. Hier ist also keine lange Reihe zu erwarten.

Beispiele:

71	7*1	7

30	3*0	0

Wir listen die Zahlen auf, die sofort bei einer einstelligen Ziffer enden, abgesehen von den Zahlen, die eine 1 oder 0 enthalten:

22	32	42
23	33	
24		

3.2 Beispiele für Produktfolgen

Wir zeigen jetzt ein paar Folgen im zweistelligen Zahlengebiet.

77	7*7	49
49	4*9	36
36	3*6	18
18	1*8	8

98	9*8	72
72	7*2	14
14	1*4	4

43	4*3	12
12	1*2	2

Man sieht, dass bei den zweistelligen Zahlen keine langen Reihen gebildet werden. Bei unseren Beispielen hat die 77 mit vier Schritten bei den zweistelligen Zahlen die längste Reihe.

3.3 Übersicht über die zweistelligen Zahlen ab 20

Wir zeigen hier alle zweistelligen Zahlen von 20 bis 99.

	1. Produkt	2. Produkt	3. Produkt	4. Produkt
20	0	0	0	0
21	2	0	0	0
22	4	0	0	0
23	6	0	0	0
24	8	0	0	0
25	10	0	0	0
26	12	2	0	0
27	14	4	0	0
28	16	6	0	0
29	18	8	0	0

30	0	0	0	0
31	3	0	0	0
32	6	0	0	0
33	9	0	0	0
34	12	2	0	0
35	15	5	0	0
36	18	8	0	0
37	21	2	0	0
38	24	8	0	0
39	27	14	4	0
40	0	0	0	0
41	4	0	0	0
42	8	0	0	0
43	12	2	0	0
44	16	6	0	0
45	20	0	0	0
46	24	8	0	0
47	28	16	6	0
48	32	6	0	0
49	36	18	8	0
50	0	0	0	0
51	5	0	0	0
52	10	0	0	0
53	15	5	0	0
54	20	0	0	0
55	25	10	0	0
56	30	0	0	0
57	35	15	5	0
58	40	0	0	0
59	45	20	0	0
60	0	0	0	0
61	6	0	0	0
62	12	2	0	0
63	18	8	0	0
64	24	8	0	0
65	30	0	0	0
66	36	18	8	0
67	42	8	0	0
68	48	32	6	0
69	54	20	0	0
70	0	0	0	0
71	7	0	0	0
72	14	4	0	0
73	21	2	0	0
74	28	16	6	0
75	35	15	5	0
76	42	8	0	0
77	49	36	18	8
78	56	30	0	0
79	63	18	8	0
80	0	0	0	0
81	8	0	0	0
82	16	6	0	0

83	24	8	0	0
84	32	6	0	0
85	40	0	0	0
86	48	32	6	0
87	56	30	0	0
88	64	24	8	0
89	72	14	4	0
90	0	0	0	0
91	9	0	0	0
92	18	8	0	0
93	27	14	4	0
94	36	18	8	0
95	45	20	0	0
96	54	20	0	0
97	63	18	8	0
98	72	14	4	0
99	81	8	0	0

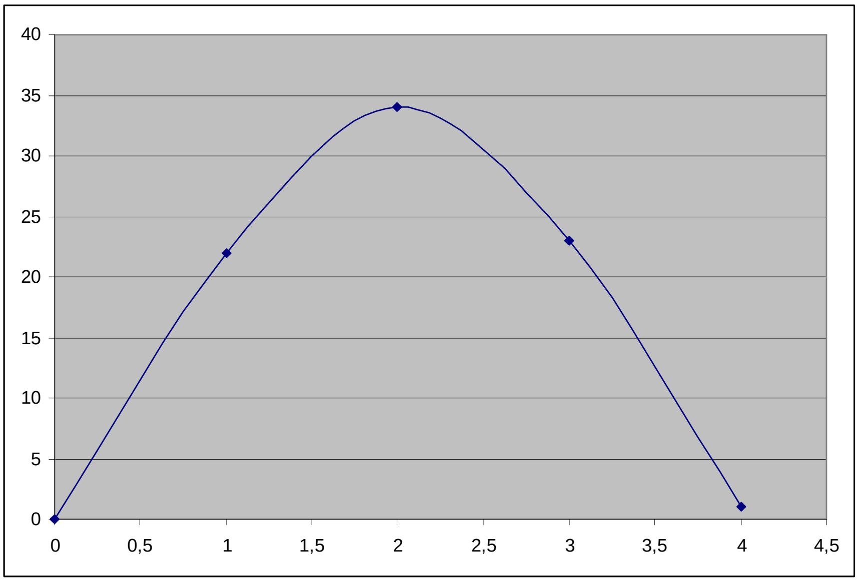
Gelb sind alle Zahlen über 0 gefärbt. Die letzte Zahl ist immer einstellig oder gehört zur Zehnerreihe. Dann ist ihr Ziffernprodukt einstellig und gleich Null. Deshalb muss man beim Zählen ein bisschen aufpassen:

Überblick über die Anzahl der Schritte bei den 80 zweistelligen Zahlen:

Schritte	Anzahl	in Prozent
1	22	27,50%
2	34	42,50%
3	23	28,75%
4	1	1,25%
Summe	80	100,00%

In der Tabelle sieht man in der ersten Spalte wie viele Schritte vorkamen. In der zweiten wie viele Zahlen, so viele Schritte gebraucht haben, bis sie bei einer einstelligen Zahl ankommen. Danach haben wir diese Ergebnisse in Prozent ausgerechnet. Wie man sehen kann, sind die meisten Zahlen nach zwei Schritten auf eine einstellige Zahl gekommen (34) und die wenigsten nach vier Schritten (1). Etwa gleich aufgeteilt ist die Anzahl nach einem (22) und nach drei (23) Schritten.

In folgendem Diagramm haben wir noch einmal unsere Ergebnisse dargestellt. Auf der x-Achse steht die Anzahl der Schritte und auf der y-Achse wie oft diese Schrittzahl vorkommt
.
Man erkennt, dass nach zwei Schritten der höchste Punkt erreicht ist. Nach vier Schritten der tiefste Punkt. Sehr gut erkennt man, dass nach 1 und 3 Schritten etwa gleich viele Zahlen bei einer einstelligen Zahl ankommen.



4. Dreistellige Zahlen

Bei den dreistelligen Zahlen, gilt wie bei den zweistelligen Zahlen, dass man die Zahlen verwerfen kann, die eine 1 oder eine 0 enthalten. Aber hier braucht man 2 von einer Zahl oder 1 von beiden Zahlen. Erst dann kann man die Zahl verwerfen.

Beispiele:

611	6*1*1	6

190	1*9*0	0

233	2*3*3	18
18	1*8	8

Weiter haben wir die dreistelligen Zahlen noch nicht untersucht.

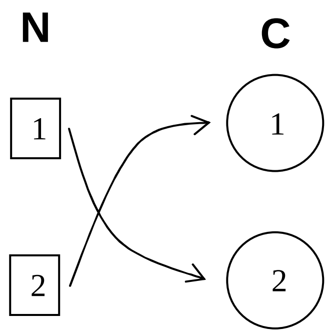
Whats App

Es gibt Nachrichten und Chats. Die Nachrichten wollen wir in die Chats verteilen. Dazu gibt es natürlich mehrere Möglichkeiten der Verteilung und verschiedene Fragen, die man sich stellen kann:

(1) Wie viele Nachrichten sind in welchem Chat?
(2) Welche Nachrichten sind in welchem Chat?

Wir haben uns mit Frage 2 beschäftigt.

Beispiel:



Wir können diese Aufgabe auf zwei Arten lösen, indem wir z.B. Nachricht 1 zu Chat 1 und Nachricht 2 zu Chat 2 zuteilen oder umgekehrt (wie im Beispiel)

C1	C2
1	2
2	1

C1	C2	C3
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

Die zweite Tabelle löst das Problem für drei Nachrichten, die auf drei Chats aufgeteilt werden. Man sieht, das es 6 Möglichkeiten gibt.

Inder folgenden Tabelle verteilen wir 4 Nachrichten auf 4 Chats:

C1	C2	C3	C4
1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
2	1	3	4
2	1	4	3
2	3	1	4
2	3	4	1
2	4	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4
3	1	4	2
3	2	1	4
3	2	4	1
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	1	3	2
4	2	1	3
4	2	3	1
4	3	1	2
4	3	2	1

Man multipliziert die Zahlen von oben nach unten, also bei 4 Nachrichten 4x3x2x1. Das kann man so erklären: Für den ersten Chat gibt es vier Möglichkeiten. Für jeden dieser vier Möglichkeiten gibt es drei Möglichkeiten im Chat zwei, dass heißt das es für die ersten drei Chats insgesamt 12 Möglichkeiten gibt. Bei den Zahlen 6,10 und 30 steigen die Anzahlen der Möglichkeiten sehr, weil …:

6x5x4x3x2x1= 720 Möglichkeiten

10x9x8x7x6x5x4x3x2x1= 3.628.800 Möglichkeiten

30x29x28x27x26x25x24x23x22x21x20x19x18x17x16x15x14x
13x12x11x10x9x8x7x6x5x4x3x2x1=265.252.859.800.000.000.000.000.000.000.000.
00 Möglichkeiten

Größere Faktoren bedeuten größere Ergebnisse.
…So berechnet man die Möglichkeiten der Nachrichten die man bekommt…

Gefährdung des Grundwassers

1. Lehm schützt unser Grundwasser – Sand ist ein Problem

Lehm ist wasserfest und das Regenwasser kommt an diesen Stellen nicht durch. Da Sand wasserdurchlässig ist, können Giftstoffe durch den Sand zum Grundwasser gelangen. Wenn also viel Sand und wenig Lehm in der Bahn zum Grundwasser ist, kann das Wasser leicht verschmutzt werden und das Trinkwasser wird verunreinigt. Das kann viele schwere Folgen haben z.B., dass der Mensch, der das Wasser trinkt, krank werden kann.
http://www.umweltbundesamt.de/themen/wasser/grundwasser

Wir haben mit Excel eine Zufallstabelle angelegt, die zufällige Zahlen zwischen 0 und 1 erzeugt. Dann geben wir eine Dichtezahl an und in einer weiteren Tabelle (siehe Beispiele) werden alle Zahlen unter der Dichtezahl rot markiert und alle Zahlen über der Dichtezahl werden weiß markiert, bzw. mit 0 und 1 versehen. Wenn die Dichtezahl z.B. gleich 0,6 ist, dann werden etwa 60% der Felder rot markiert und nur 40% weiß.

Rot = Lehm
Weiß = Sand

Bei selber Dichtezahl, nämlich 0,6, kann es unterschiedliche Ergebnisse geben:

Undurchlässig

0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
0	1	0	0

Durchlässig

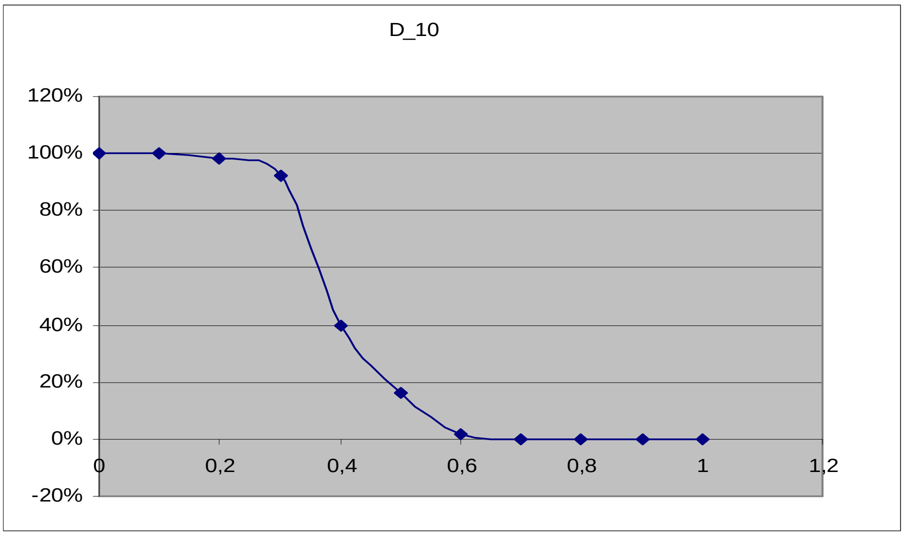
0	1	0	1
1	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1

2. Abhängigkeit von der Höhe der Bodenschicht

Wir haben Bodenschichten mit 10, 20 und mit 30 Schichten übereinander untersucht, um festzustellen, wie sich die Durchlässigkeit mit der Dichte ändert. Für jede Höhe haben wir mit Excel jeweils 50 Zufallsversuche für 10 verschiedene Dichten gemacht und dann die Durchlässigkeiten berechnet:

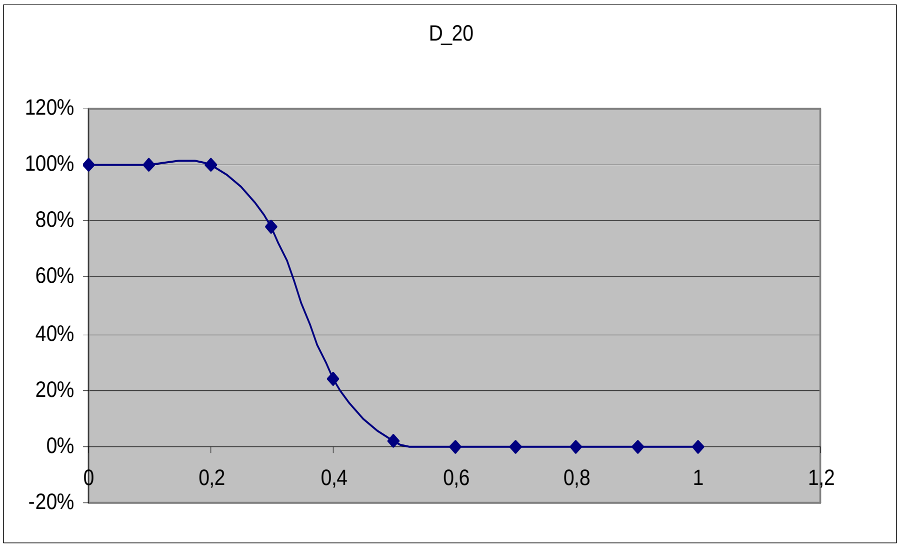
d	D_10	D_20	D_30
0,0	100%	100%	100%
0,1	100%	100%	100%
0,2	98%	100%	94%
0,3	92%	78%	74%
0,4	40%	24%	2%
0,5	16%	2%	0%
0,6	2%	0%	0%
0,7	0%	0%	0%
0,8	0%	0%	0%
0,9	0%	0%	0%
1	0%	0%	0%

Die folgenden Diagramme zeigen, wie die Durchlässigkeiten von der Dichte abhängen:

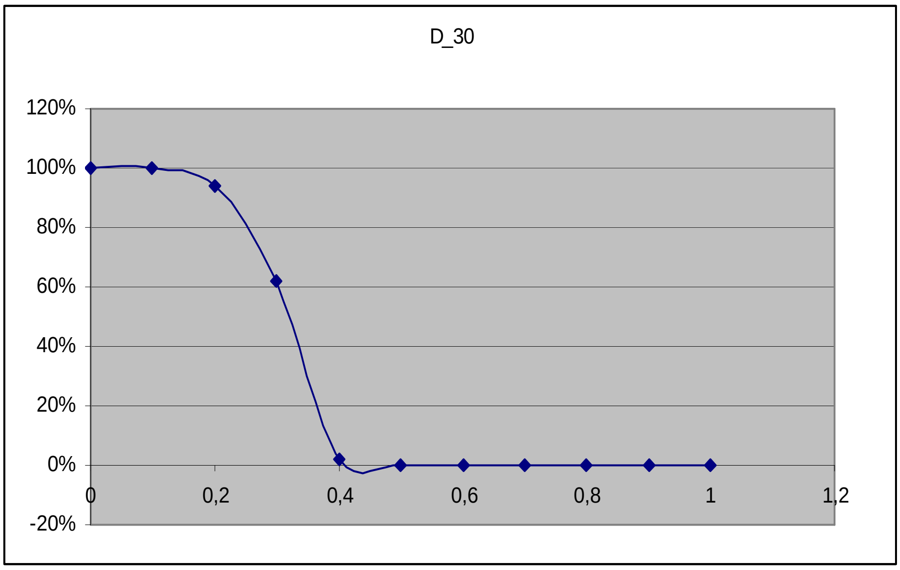


Bis etwa Dichte 0,3 ist ein Boden mit 10 Schichten fast zu hundert Prozent durchlässig. Dann nimmt die Durchlässigkeit schnell ab und bei einer Dichte von 0,6 ist der Boden praktisch undurchlässig.

Für dickere Schichten haben die Kurven einen ähnlichen Verlauf, aber der Abfall der Durchlässigkeit liegt schon bei kleineren Dichten.



Hier beginnt der Abfall schon bei 0,2 und ab 0,5 ist die Durchlässigkeit schon fast Null. Bei 30 Schichten liegen diese Werte schon bei etwa 0,15 und 0,4.



Ob die Breite der Bodenschicht eine Rolle spielt, haben wir noch nicht untersucht.