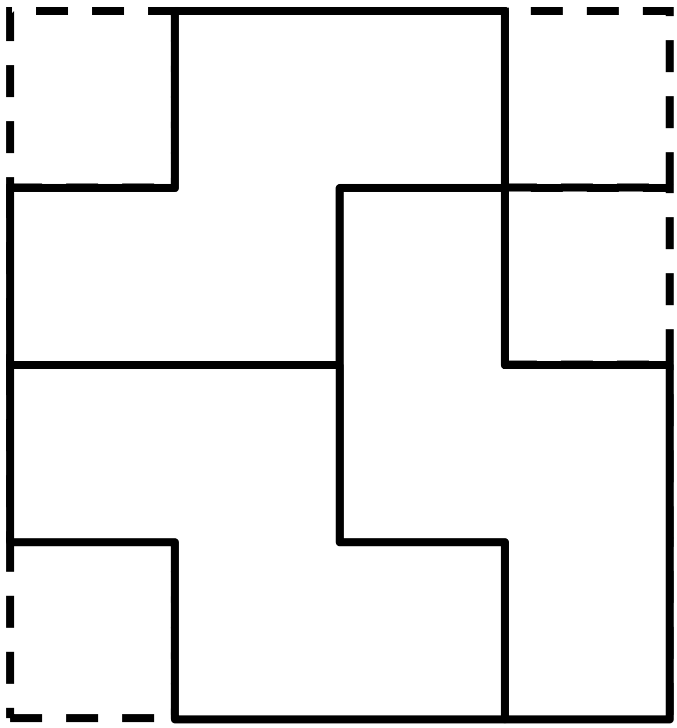
the MadMax



zeitung für mathematik am mpg trier / heft 33 / februar 2014

Inhaltsverzeichnis		**Seite**

Liebe MadMax – Freunde,

nach harter Arbeit haben wir wieder ein umfangreiches Heft für euch gestaltet. Beim Lesen der sieben Artikel könnt ihr euch diesmal hauptsächlich mit geometrischen Spielereien beschäftigen und bei einem Artikel könnt ihr interessante Würfelprobleme lösen.

Mit sechs der Arbeiten waren wir auch bei „Schüler experimentieren“ und Moritz Ditter hat dabei einen zweiten Preis beim Regionalwettbewerb in Bitburg gewonnen. Mariano Festa und Zoe Harder erreichten dort den dritten Platz.

Viel Spaß mit unserem Heft wünscht Euch Euer

MadMax –Team

Würfelsummen

1. Was ist unser Problem

Wenn man mit einem normalen Spielwürfel würfelt, dann zählt man die Summe, der sichtbaren Augen zusammen und schreibt diese in eine Liste. Dann würfelt man wieder, bildet erneut die Summe der sichtbaren Augen und man addiert das Ergebnis zur vorherigen Zahl und das macht man immer weiter. Bei einer anderen zweiten solcher Listen können ganz andere Zahlen auftreten.

Bei einer Würfelreihe könnten zum Beispiel folgende Zahlen entstehen:

20, 38, 54, 72, …

2. Wir erklären unsere Liste

Die 20 ist entstanden, indem wir eine sechs gewürfelt haben und dadurch die eins unten lag und da die gegenüberliegenden Seiten immer sieben ergeben. Dann würfelten wir eine vier. Da die vier oben lag, lag die drei unten und deshalb konnte man von 21 Punkten, 18 Punkte sehen. Also konnte man insgesamt nach zweimal würfeln 38 Punkte sehen.

Die nächste Zahl die wir würfelten, war die 2. Das heißt die 5 lag unten und diese 5 Punkte konnte man deswegen nicht sehen. Also sahen wir 16 Punkte und diese addierten wir zu den vorherigen Ergebnissen. Bis jetzt haben wir also 54 Punkte.

Die nächste Zahl war die 4. Die 3 lag deshalb unten und diesmal wurden 18 von 21 Punkten erreicht. Wenn man diese zu den anderen Summanden dazu addiert erhält man die Summe 72.

Beim zweiten Beispiel sind folgende Zahlen aufgetreten:

16, 32, 51, …

3. Welche Zahlen können in keiner solchen Liste auftreten?

Bei solchen Beispielen können viele Zahlen nicht auftreten, zum Beispiel die Zahlen 1 - 14 oder die Zahlen 21 - 29. Die 1 und alle anderen Zahlen bis 14 können in keiner solchen Liste auftreten, weil man würfelt mindestens eine 1 und wenn man einmal um den Würfel herumgeht, sieht man mindestens 15 Punkte. Man kann max. eine 6 würfeln, das heißt man sieht 20 Punkte.

Die Zahlen 21-29 können nicht auftreten, weil wenn man das zweite mal würfelt und den Würfel betrachtet, sieht man min. 15 Punkte und wenn man diese zu dem ersten Ergebnis dazu addiert erhält man mindestens eine 30 und höchstens eine 40. Danach passiert etwa dasselbe: Man sieht mindestens eine 15 und höchstens eine 20. Diese addiert man zu den anderen Summanden und man erhält eine Zahl zwischen 45 und 60.

4. Sind das nur relativ kleine Zahlen oder auch große?

Bisher wissen wir, dass folgende Zahlen nicht auftreten können: 1 - 14, 21 - 29 und 41 - 44. Danach haben wir herausgefunden, dass die 44 die letzte Zahl ist, die nicht in einer solchen Liste auftreten kann. Ab der 45 können alle Zahlen auftreten.

5. Welche Zahlen gibt es bei anderen Würfeln

Es gibt ja auch Würfel mit mehr oder weniger Seiten als ein normaler Würfel. Wir haben jetzt untersucht, welche Zahlen dabei auftreten können und welche nicht.

5.1 Die Münze – ein Würfel mit zwei Seiten

Es gibt zwei Seiten bei einer Münze. Auf einer Seite steht die 1 und auf der anderen Seite steht eine 2. Es kann hierbei jede Zahl vorkommen, bis auf die 0. Wenn nämlich die 1 oben liegt, dann kommt immer 1 dazu und man kann alle Zahlen bekommen.

5.2 Ein Glücksrad mit drei gleich großen Bereichen

Ein Glücksrad ist auch so ähnlich wie ein Würfel. Die Zahl, die kommt, ist „unsichtbar" und die zwei anderen addieren wir. Die 1 und 2 gehen nicht, weil wenn die 3 unten liegt und die 1 und die 2 sichtbar sind, kommt 3 heraus und deshalb gehen die Zahlen 1, 2 nicht. Die Tabelle ist zustande gekommen, indem wir uns bei der

3, 4 und 5 überlegt haben, welche Zahl unten liegen muss, damit die 3, 4 oder 5 herauskommt. Ab der 6 muss man zweimal würfeln und ab der 9 dreimal.

unten	**3,2,1**
sichtbar	**3, 4, 5**
	Dreierrad
1	
2	
3	**3**
4	**2**
5	**1**
6	**3,3**
7	**3,2**
8	**3,1**
9	**3,3,3**
10	**3,3,2**
11	**3,3,1**
12	**3,3,3,3**
13	**3,3,3,2**
14	**3,3,3,1**
15	**3,3,3,3,3**
16	**3,3,3,3,2**
17	**3,3,3,3,1**
18	**3,3,3,3,3,3**
19	**3,3,3,3,3,2**
20	**3,3,3,3,3,1**
21	**3,3,3,3,3,3,3**
22	**3,3,3,3,3,3,2**
23	**3,3,3,3,3,3,1**

5.3 Der Tetraederwürfel

Der Tetraederwürfel ist wieder ein richtiger Würfel. Sehen kann man die Zahlen 6,7,8 und 9. Die kleinsten Zahlen die man bilden kann, sind 6-9. Die Zahlen 10 und 11 kann man nicht bilden. Ab der Zahl 12 kann man jede Zahl, die es gibt bilden:

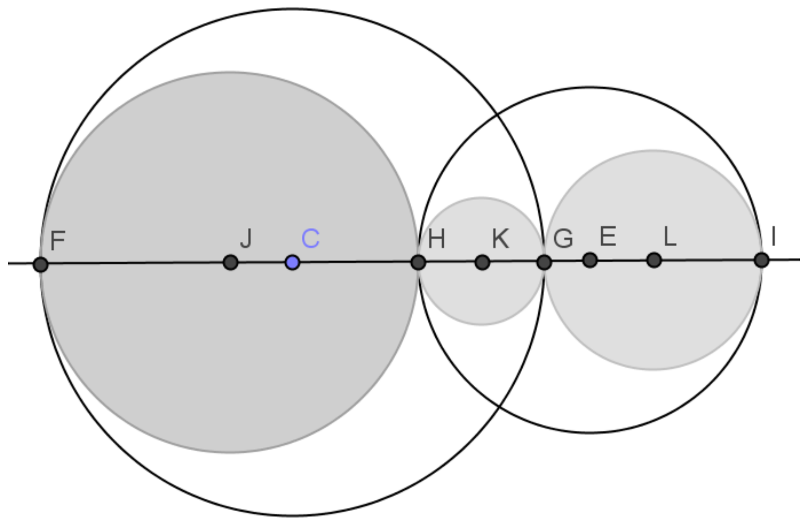
unten	4,3,2,1
sichtbar	6, 7, 8, 9
n	Tetraeder
12	4,4
13	4,3
14	4,2
15	4,1
16	3,1
17	2,1
18	4,4,4
19	4,4,3
20	4,4,2
21	4,4,1
22	4,3,1
23	4,2,1
24	4,1,1

Wie es aussieht, wenn man statt mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 den Würfel mit anderen Zahlen beschreibt, das müsste man auch noch untersuchen.

Kreise mit Kreisen

1. Vergleich von Kreisflächen

Die Mittelpunkte von zwei Kreisen haben voneinander den Abstand c und die beiden Kreise haben die Radien a und b. In die drei entstehenden Felder werden wieder Kreise eingezeichnet (grau).



Jetzt geht es darum, welche Bedingungen für a, b und c gelten müssen, damit die Fläche des linken grauen Kreises so groß ist wie die der anderen beiden Kreise zusammen.

In den folgenden Kapiteln habe ich die Frage mit Geogebra untersucht und auch noch weitere Fragen beantwortet. Hierfür habe ich eine Datei in Geogebra erstellt, in der ich die Abstände mit Schiebern verändern kann.

2. Veränderung der Radien und Beobachtung der Wirkung

Die grauen Kreise nenne ich von links nach rechts h, k und p. Ich probiere zuerst aus wie die Flächen sich verändern, wenn man a, b und c verändert. Das probiere ich zuerst mit c aus und starte mit a = b = c = 1.

a =	b =	c =	Fläche von h	Fläche von k	Fläche von p
1	1	1	0,79	0,79	0,79
1	1	1,2	1,13	0,5	1,13
1	1	1,4	1,54	0,28	1,54
1	1	1,6	2,01	0,13	2,01
1	1	1,8	2,54	0,03	2,54
1	1	2,0	Pi	0	Pi

Wenn ich c vergrößere wird die Fläche h und die Fläche p größer. Beide bleiben aber gleich groß. Die Fläche k wird jedoch kleiner. Also können die Flächen k und p zusammen nie gleich groß sein wie h, wenn man nur c verändert.

Dasselbe wie mit c mache ich jetzt auch mit b:

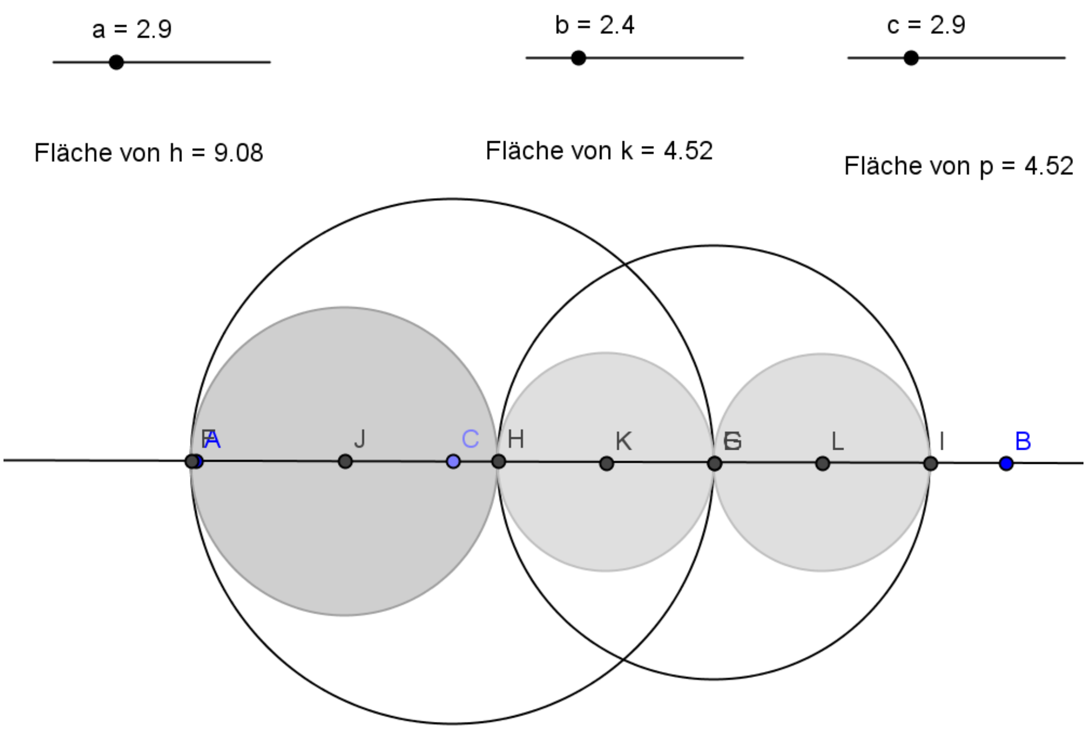
a =	b =	c =	Fläche von h	Fläche von k	Fläche von p
1	1	1	0,79	0,79	0,79
1	1,2	1	0,5	1,13	1,13

1	1,4	1	0,28	1,54	1,54
1	1,6	1	0,13	2,01	2,01
1	1,8	1	0,03	2,54	2,54
1	2,0	1	0	Pi	Pi

Wenn b vergrößert wird, wird der rechte Startkreis größer und deshalb auch die Fläche der Kreise k und p. Dafür wird h sogar kleiner und das Problem kann so nicht gelöst werden.

Um jetzt die Lösung zum anfänglichen Problem zu finden, muss ich also wahrscheinlich alle Radien und den Abstand der Kreise verändern.

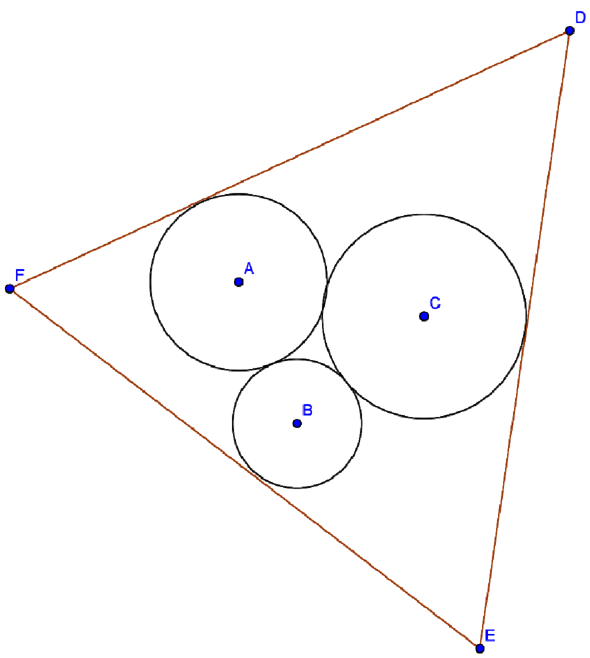
Und so kann das aussehen:



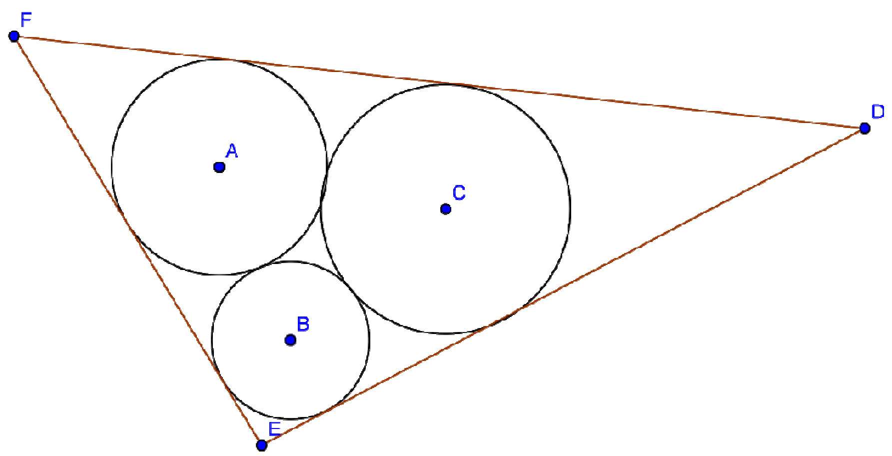
Einhüllende Dreiecke

1. Das sollte ich machen

In dieser Arbeit sollte ich herausfinden, ob es möglich ist um drei Kreise ein Dreieck so zu legen, dass jeder Kreis von einer Seite berührt wird. Wenn nicht einer der Kreise zu klein ist, geht das, aber es gibt sogar mehrere Möglichkeiten ein Dreieck um drei Kreise zu legen.

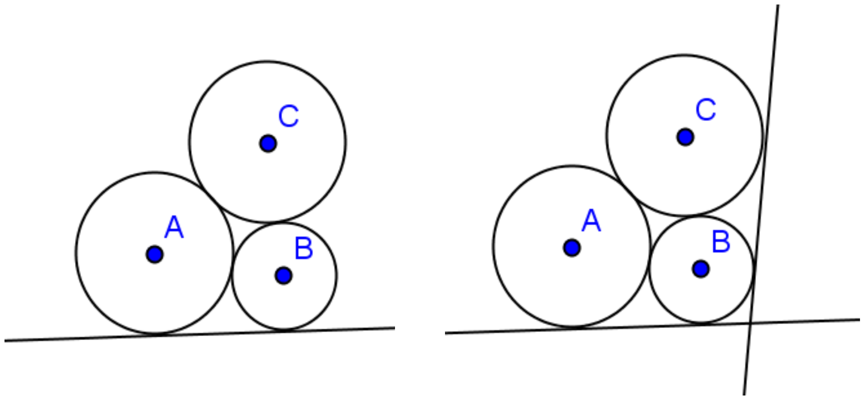


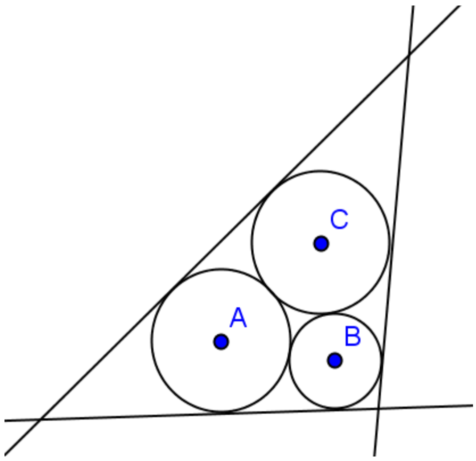
Eindeutig wird es, wenn man verlangt, dass jede Seite zwei Kreise berühren muss. Ich habe Regeln für die Radien der Kreise gefunden. Wenn man diese einhält, dann ergibt es ein einhüllendes Dreieck.



2. Warum es nur ein Dreieck gibt

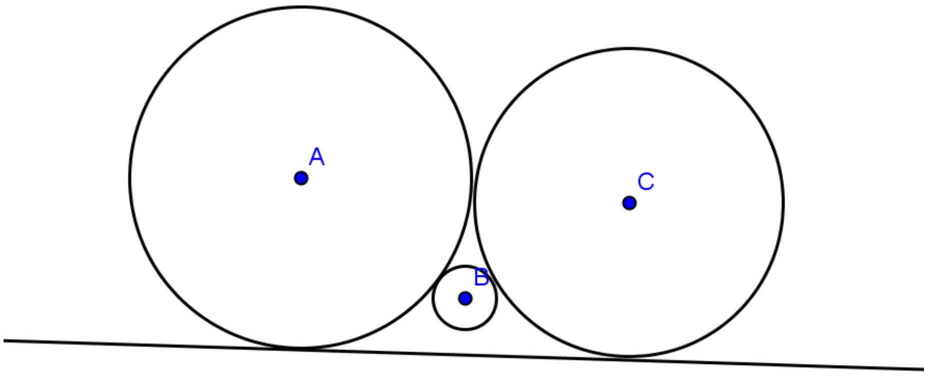
Dass es nur ein Dreieck geben kann, zeigen die folgenden Abbildungen:



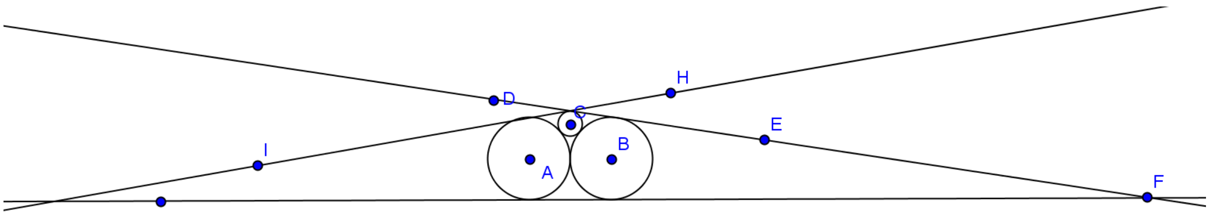


3. Ein zu kleiner Kreis

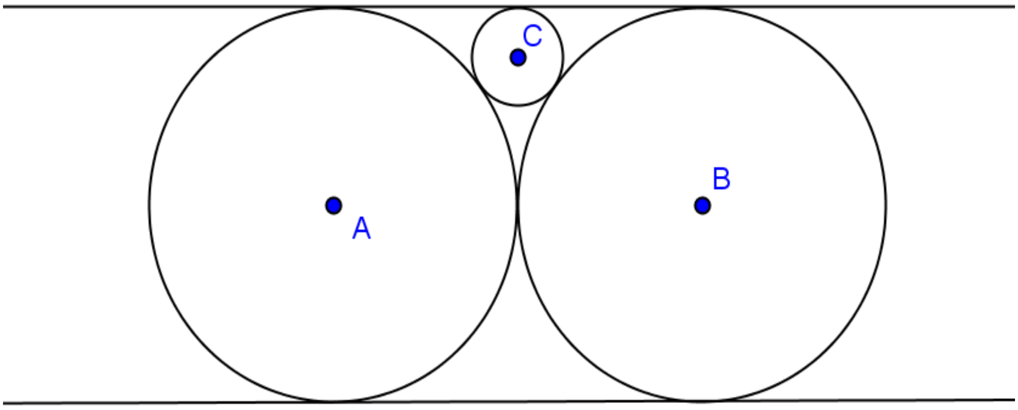
Wenn ein Kreis zu klein ist, dann kann man kein Dreieck zeichnen:



Im nächsten Bild ist der der Kreis in der Mitte knapp groß genug, dass man noch ein Dreieck machen kann. Wenn aber nun der Kreis ein kleines bisschen kleiner wird, so kann man kein Dreieck mehr zeichnen.



Im nächsten Bild geht es dann gerade nicht mehr:



Hier ist der Kreis so klein, dass er unter der gezeichneten Linie liegt. Diese habe ich fürs bessere Verständnis eingefügt.

Also: Wenn er so klein ist, dass er nicht über diese Linie geht, kann man kein Dreieck machen.

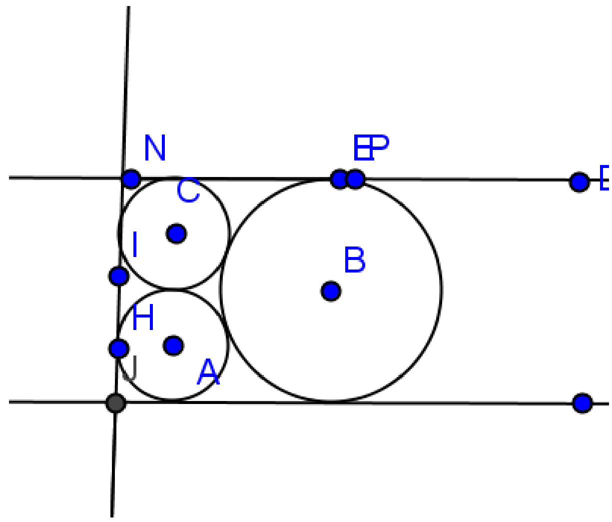
Wenn man a = b = 1 wählt, dann gilt hier c = ¼. Das ist mit Geogebra gemessen.

Das habe ich bis a = b = 10 gemessen:

a	b	c	c/a
1	1	0,25	1/4
3	3	0,75	1/4
5	5	1,25	1/4
7	7	1,75	1/4
10	10	2,5	1/4

4. Ein Kreis ist zu groß

Hierbei haben wir dasselbe Problem wie bei zwei gleich großen Kugeln. Wenn man hierbei wieder eine Linie über die beiden Kreise zieht kann man die Grenze erkenntlich machen.

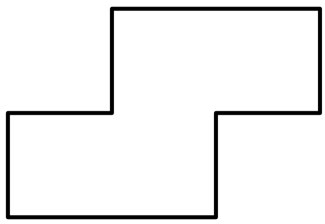


Für die nötige Größe von C muss man B-A+x rechnen: Als Ergebnis erhält man den Mindestradius von Kreis C. Ansonsten ist der Kreis mit dem Punkt C zu klein, und in dessen Folge sind die Linien die an BC und AB liegen parallel.

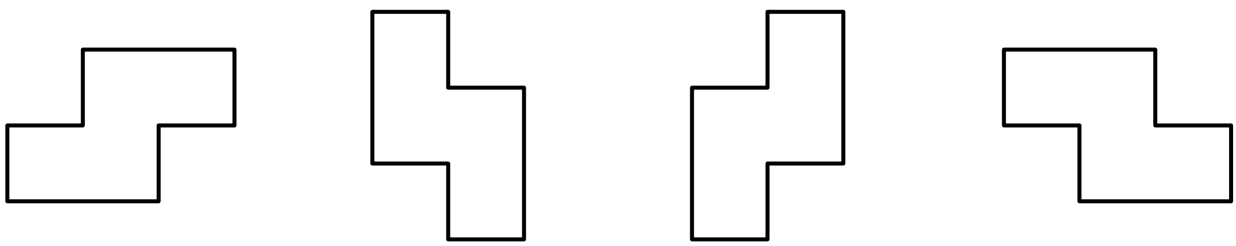
Parkettierung von Quadraten

1. Was wir wollen

Wir wollen ein System entwickeln in dem es um das Füllen von Quadraten mit einfachen Figuren geht. Dabei können die Quadrate eine beliebige Größe haben. Als einfache Figur verwenden wir zuerst:



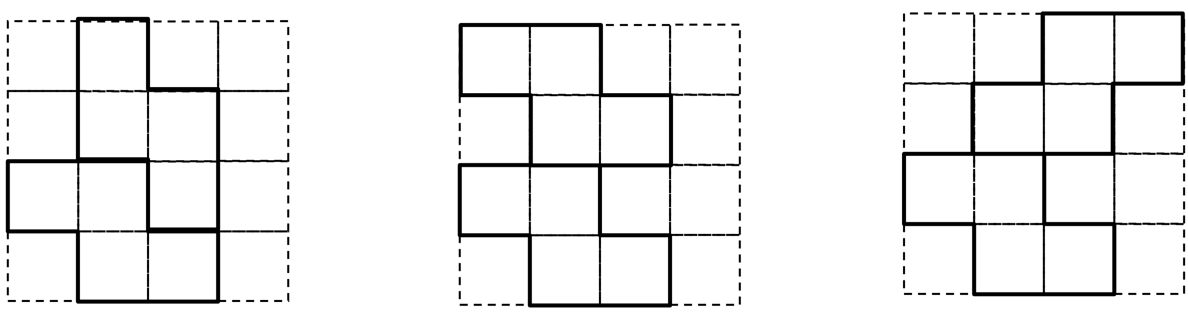
Die Figuren können gedreht oder gespiegelt werden:



Wir versuchen so viele Figuren wie möglich in ein Quadrat zu bekommen.

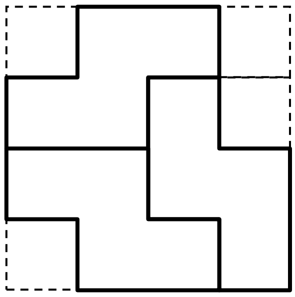
2. Die beste Lösung

Nun machen wir ein paar Beispiele.



Wie man sieht, passen nur zwei Figuren in das Quadrat, wenn man nicht aufpasst und es bleiben 8 Kästchen frei.

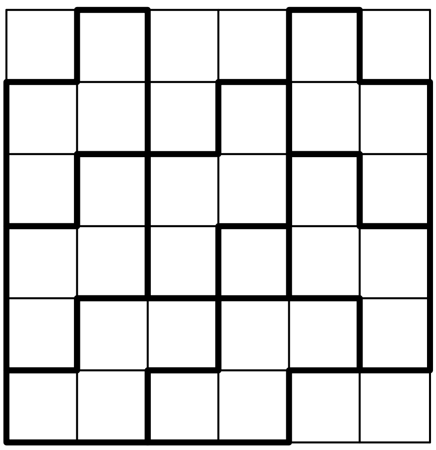
Das ist die beste Lösung für ein Quadrat dieser Größe:



Hier bleiben nur 4 Kästchen übrig. Das ist für noch eine Figur genug, aber man kann die vier freien Kästchen nicht zusammenlegen.

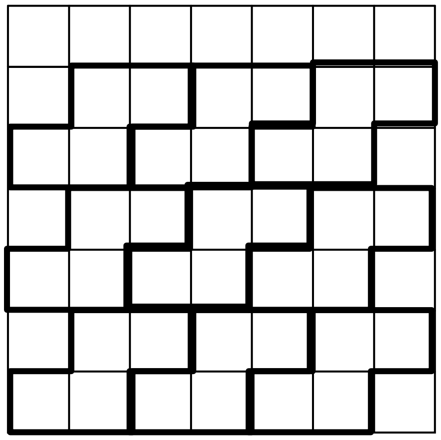
3. Wir füllen größere Quadrate

Nun ein Beispiel von einem 6x6 Quadrat. Wir kamen als Lösung auf 7 Figuren:



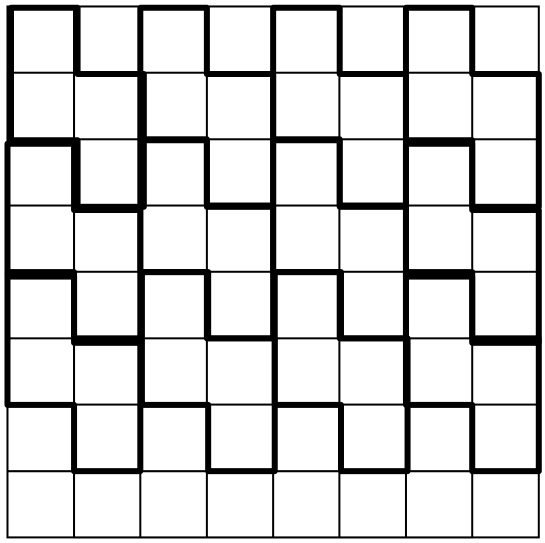
Hier sind 8 Kästchen übrig. Es bleibt Platz für 2 weitere Figuren.

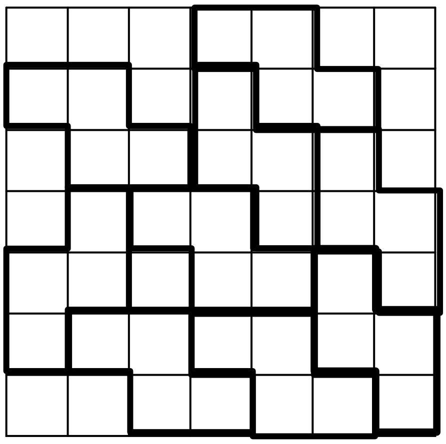
Jetzt benutzen wir ein 7x7 Quadrat:

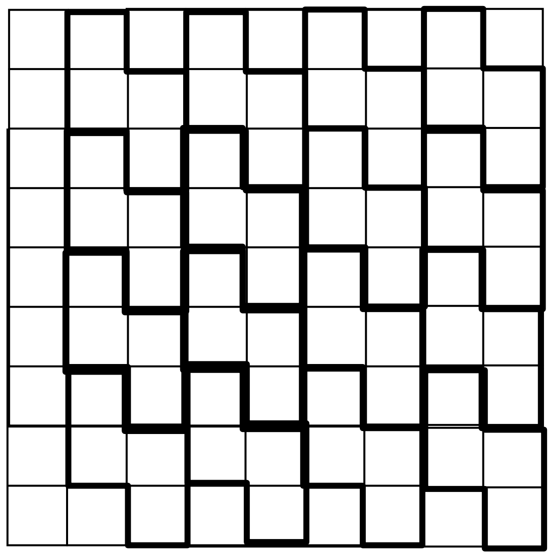


Wenn man die Figuren in Reihen macht, kann man 9 Figuren einfügen und es bleiben 13 Kästchen frei.

Die nächsten Bilder zeigen weitere Quadrate und unsere Versuche, sie mit Figuren zu füllen:







4. Die Anzahl der Figuren und freien Kästchen

Jetzt haben wir uns die Frage gestellt: Gibt es ein System, wie viele Figuren reinpassen und wie viele Kästchen übrig bleiben? Dafür haben wir die folgende Tabelle gemacht:

Quadratgröße n x n	Anzahl der Figuren	Freie Kästchen
1	0	1
2	0	4
3	1	5
4	3	4
5	4	9
6	7	8
7	9	13
8	12	16
9	16	17

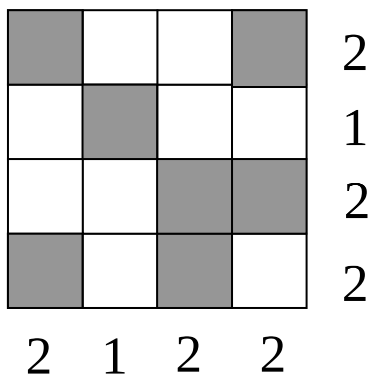
Wir konnten noch kein System erkennen. Vielleicht müsste man noch größere Quadrate untersuchen.

Graue Kästchen

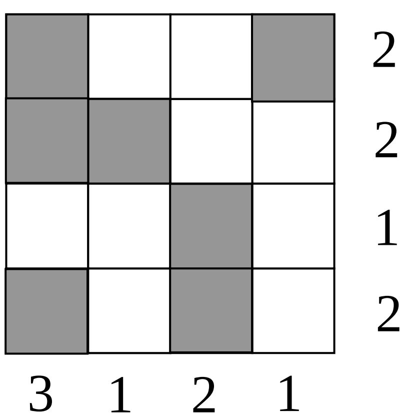
1. Darum geht es

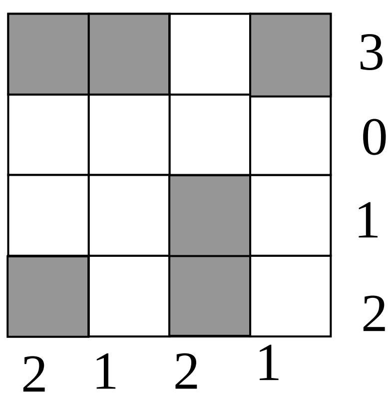
Es müssen jeweils so viele Kästchen in einem 4 x 4 Quadrat markiert werden, wie an den Seiten jeder Spalte angegeben ist.

Für das folgende Quadrat ist das Problem gelöst:



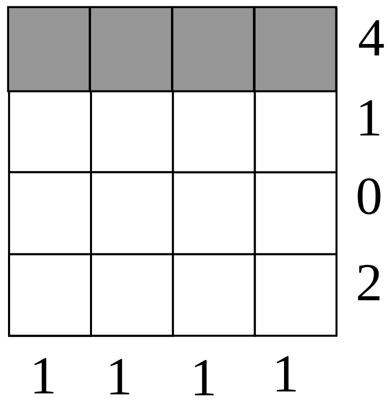
Weitere Beispiele:





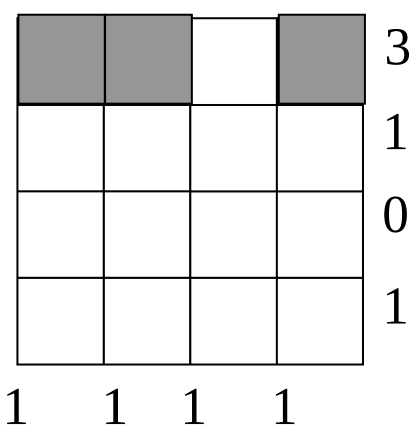
2. Es geht nicht immer

Auf jeden Fall geht es nicht, wenn am Rand eine 5 stehen würde, weil das Quadrat nur 4x4 ist. Bei einem 5x5 Quadrat würde es jedoch funktionieren.



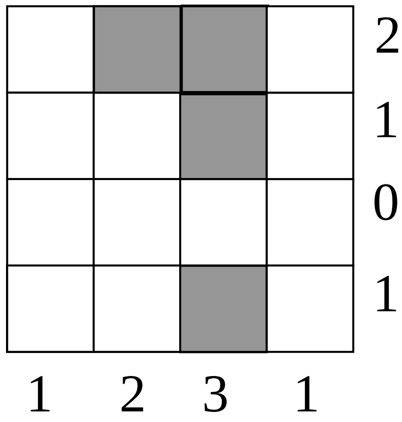
In diesem Beispiel geht es nicht, weil an der unteren Leiste Einsen stehen und rechts oben eine 4 steht. Wenn man 4 Kästchen in der oberen Reihe ausgemalt hat, ist automatisch auch die Reihe von Einsen unten ausgefüllt. Die drei Zahlen unter der 4 können nicht befolgt werden.

Auch in den beiden folgenden Beispielen geht es nicht:



Bei dem linken Beispiel stehen unter der 3 zwei Einser. Ein Kästchen kann jetzt unter der Lücke ausgemalt werden. Jetzt würde es aufgehen, wenn nicht noch eine Eins unter der Drei stehen würde. Dann würde wieder in einer Zeile von den Einsen unten zwei Kästchen ausgemalt werden.

Bei dem rechten Beispiel geht es auch nicht. Der Auftrag von den drei Kästchen würde gelingen und es gäbe auch nur eine Möglichkeit dafür, weil rechts eine Null steht. Außerdem muss man auch noch weitere Kästchen ausmalen. Dabei gehen zwei Kästchen in die zweite Spalte nicht mehr.



3. Wir untersuchen verschieden große Quadrate

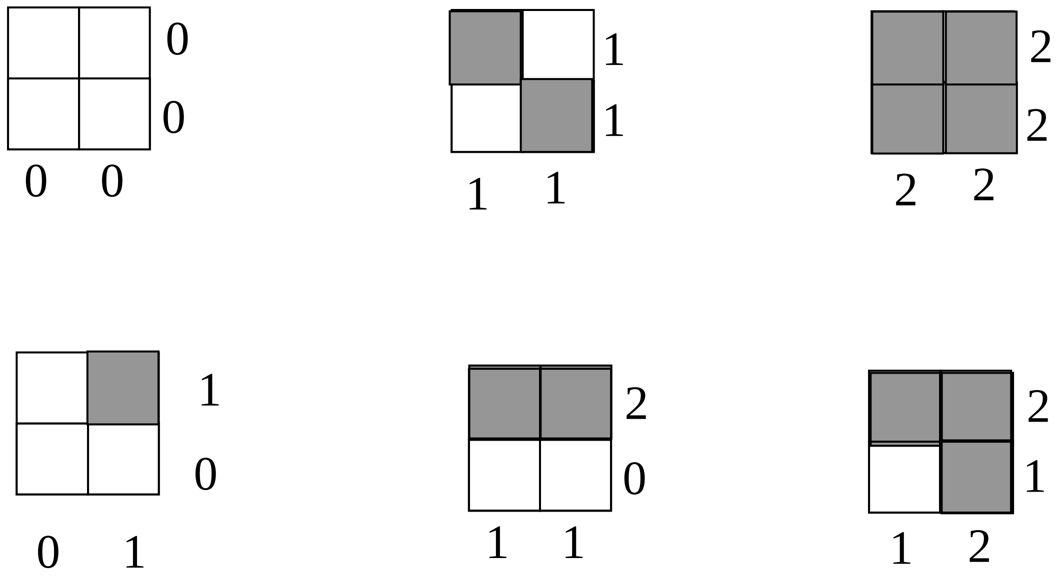
Oft können wir nicht leicht entscheiden, ob es geht oder nicht. Deshalb fangen wir erstmal mit kleineren Quadraten an und versuchen Regeln zu finden, wann es geht oder nicht geht.

Das 1 x 1 Quadrat

Beim 1x1 Quadrat kann man nur zwei Einsen oder zwei Nullen hinschreiben, weil das Quadrat ja nur ein Kästchen groß ist.

Das 2 x 2 Quadrat

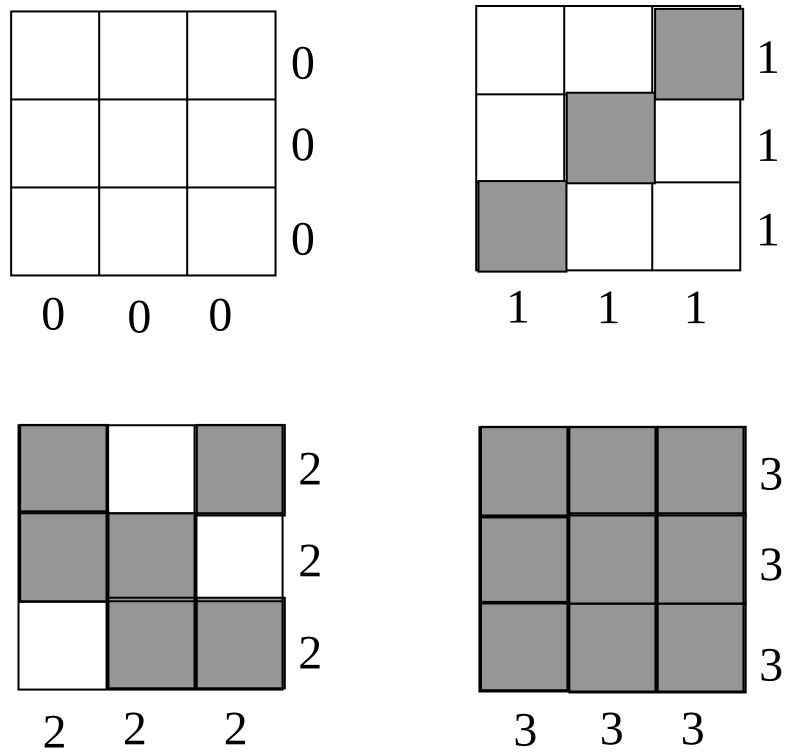
Beim 2 x 2 Quadrat können nur Einsen, Zweien und Nullen stehen.



Dies sind alle Möglichkeiten. Man könnte auch die zwei Zahlen an jeder Seite jeweils an die andere Seite schreiben. Aber das sind ja sozusagen die gleichen Möglichkeiten.

Das 3 x 3 Quadrat

Beim 3 x 3 Quadrat können auch Dreien stehen, was die Sache schwerer macht. Wir versuchen, systematisch alle Möglichkeiten zu finden.



4. Mögliche Zahlenkombinationen

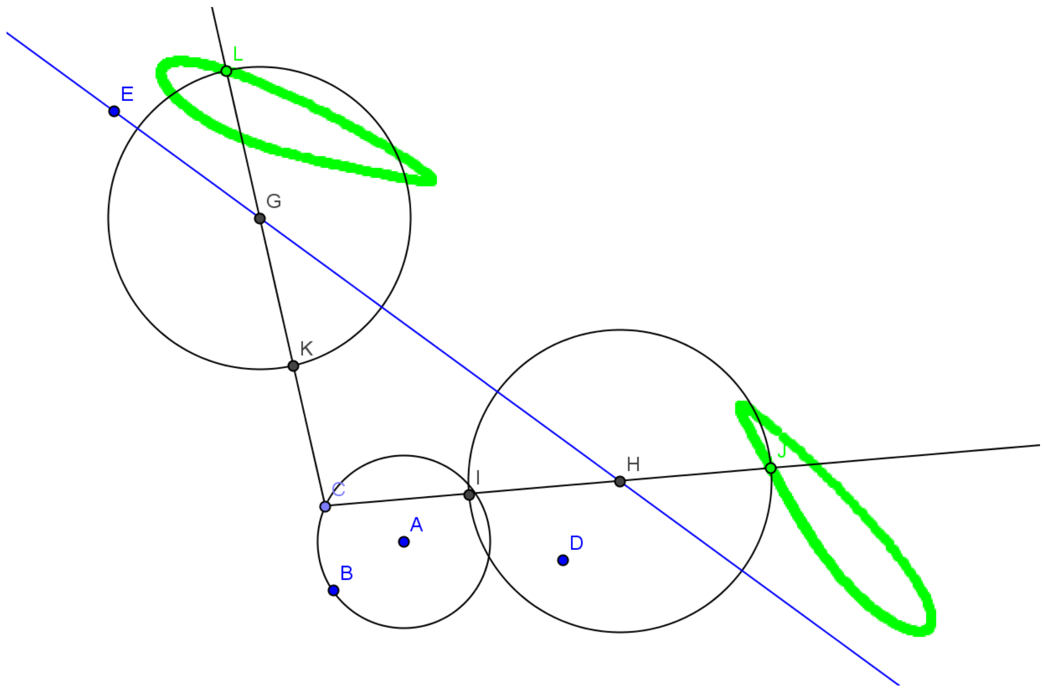
Alle Zahlenkombinationen die für die untere Reihe möglich sind.

000, 001, 002, 003, 010, 011, 012, 013, 020, 021, 022, 023, 030, 031, 032,033, 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, 113, 120,121, 122, 123, 130, 131, 132, 133, 200, 201, 202, 203, 210, 211, 212, 213, 220, 221, 222, 223, 230, 231, 232, 233, 300, 301, 302, 303, 310, 311, 312, 313, 320, 321, 322, 323, 330, 331, 332, 333,

Es sind 4 x 4 x 4 Möglichkeiten, denn man hat jeweils 4 Ziffern an jeder Stelle. Einmal z.B. geht die Null als erste Stelle, einmal die Eins, einmal die Zwei und natürlich kann auch die Drei dort stehen. Dies kann man systematisch mit allen drei Ziffern verschieden kombinieren.

Irre Maschinen

Wir haben mit Hilfe von Geogebra „Maschinen“

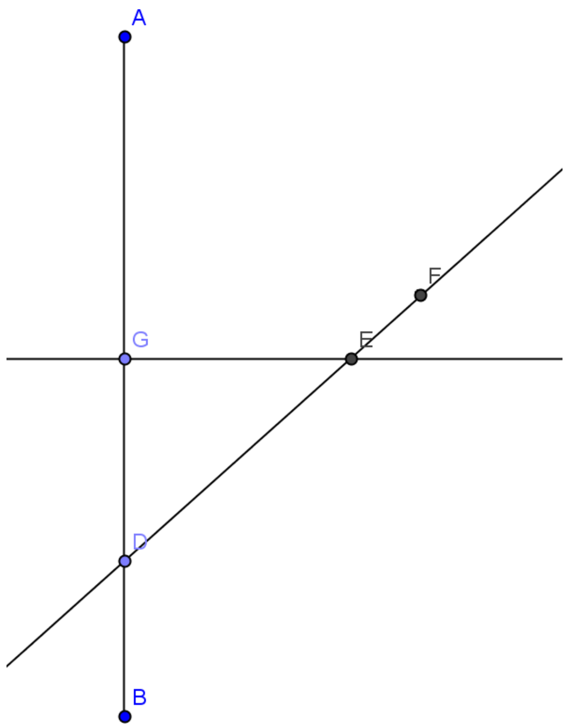


erfunden, bei denen ein Punkt mit der Maus auf einer Geraden oder einer Kurve bewegt wird. Diesen Punkt haben wir über Geraden, Strecken und Kreise mit einem anderen Punkt verbunden, der sich auf einer geheimnisvollen Kurve mit bewegt. Wir versuchen bei jeder „Maschine“ zu erklären, warum die Kurve so aussieht.

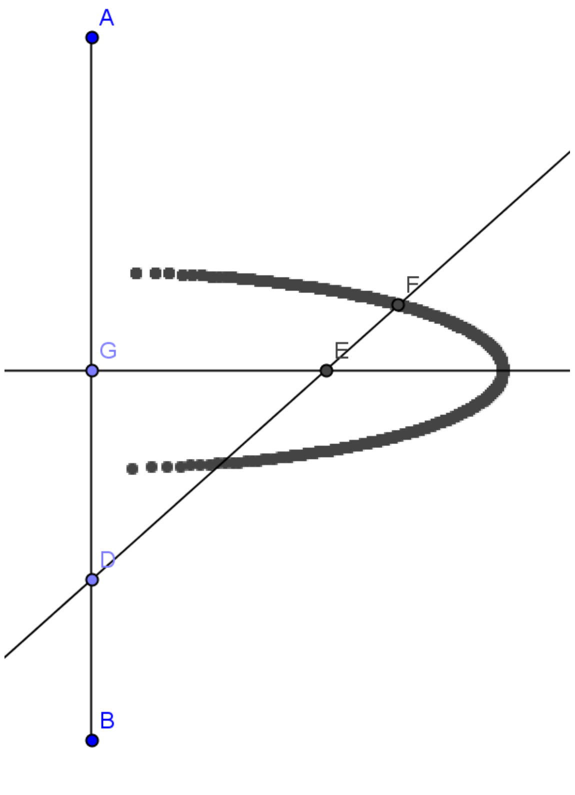
1. Wie unsere erste Maschine funktioniert

Bei diesem Thema nimmt man sich ein Kreuz, auf dem 2 Punkte D und E sind. Zwischen den Punkten D und E ist eine „Stange“ eingespannt, die bis zu einem Punkt F verlängert wird. Man kann den Punkt D auf der Strecke AB nach oben und unten bewegen.

Wir haben das mit Geogebra so gemacht, dass sich dabei die Abstände der Punkte D, E und F voneinander nicht verändern. Wenn man zum Beispiel Punkt D nach oben schiebt, bewegt sich Punkt E auf der Querachse nach rechts und Punkt F macht eine Kurve um Punkt E.



In einem
Beispiel zeigen wir das:



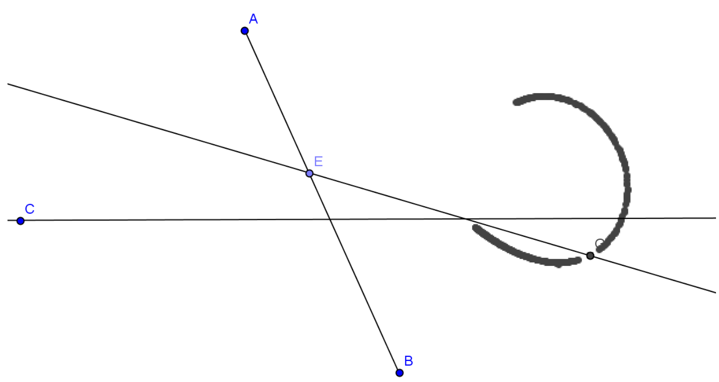
Den Punkt D haben wir nach oben und unten verschoben, dadurch hat sich der Punkt F um Punkt E gedreht. Wir haben bei Punkt F eingestellt, dass dieser eine Linie hinterlässt (Rechtsklick mit der Maus auf den Punkt und „Spur ein“).

Diese Kurve hat die Form einer halben Ellipse. Der oberste Punkt dieser Kurve entsteht, wenn D ganz unten ist. Dann ist nämlich der Punkt E ganz nah an G und deshalb F ganz nah an der Strecke AB. Wenn D auf G liegt, dann liegt F ganz rechts auf der Querachse usw.

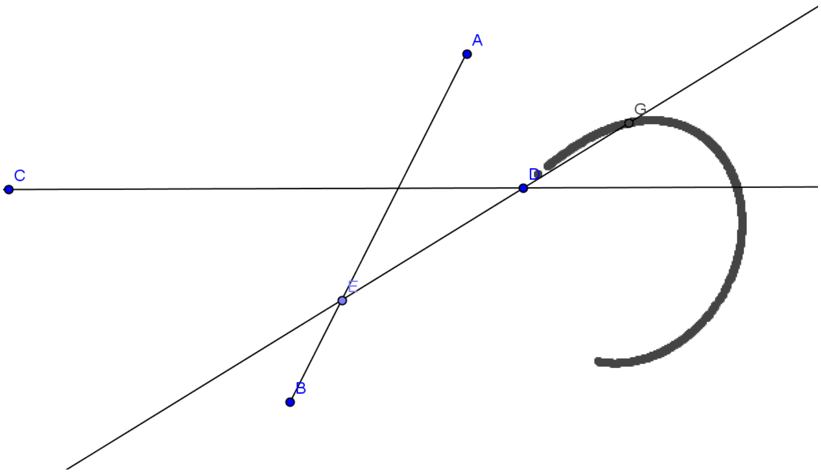
Dieses Bild entsteht, wenn man den Abstand von Punkt F zu Punkt E ändert und man den Punkt D in die Gegenrichtung bewegt.

2. Es müssen nicht immer 90° sein

1. kleiner 90°:



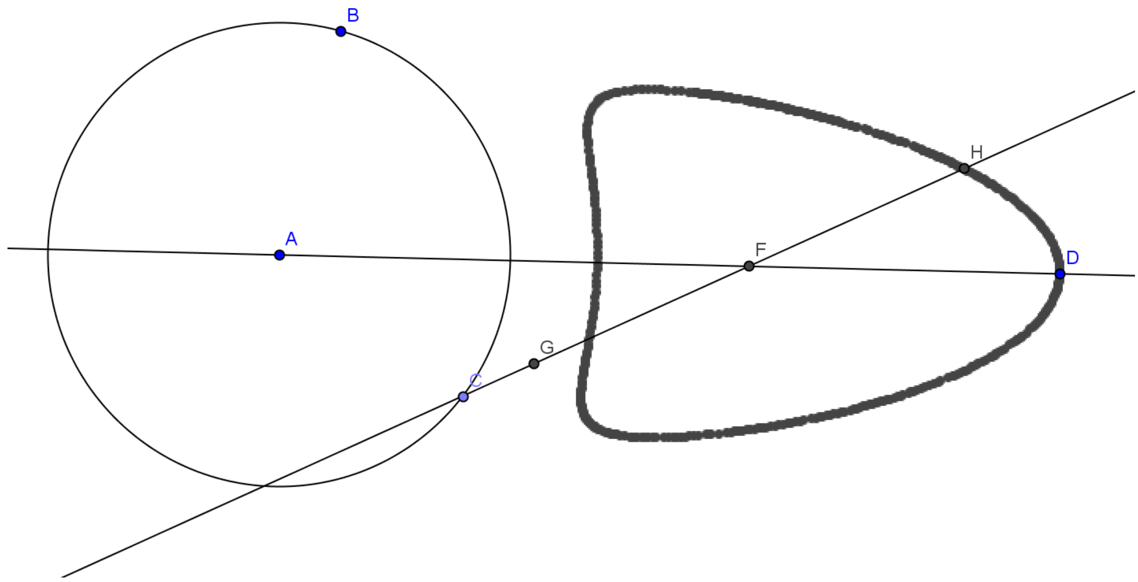
2. größer 90°



3. Die Kreis – Geraden – Maschine

Wir haben uns eine neue Maschine überlegt, indem wir die Senkrechte durch einen Kreis ersetzen auf dem sich Punkt C bewegt.

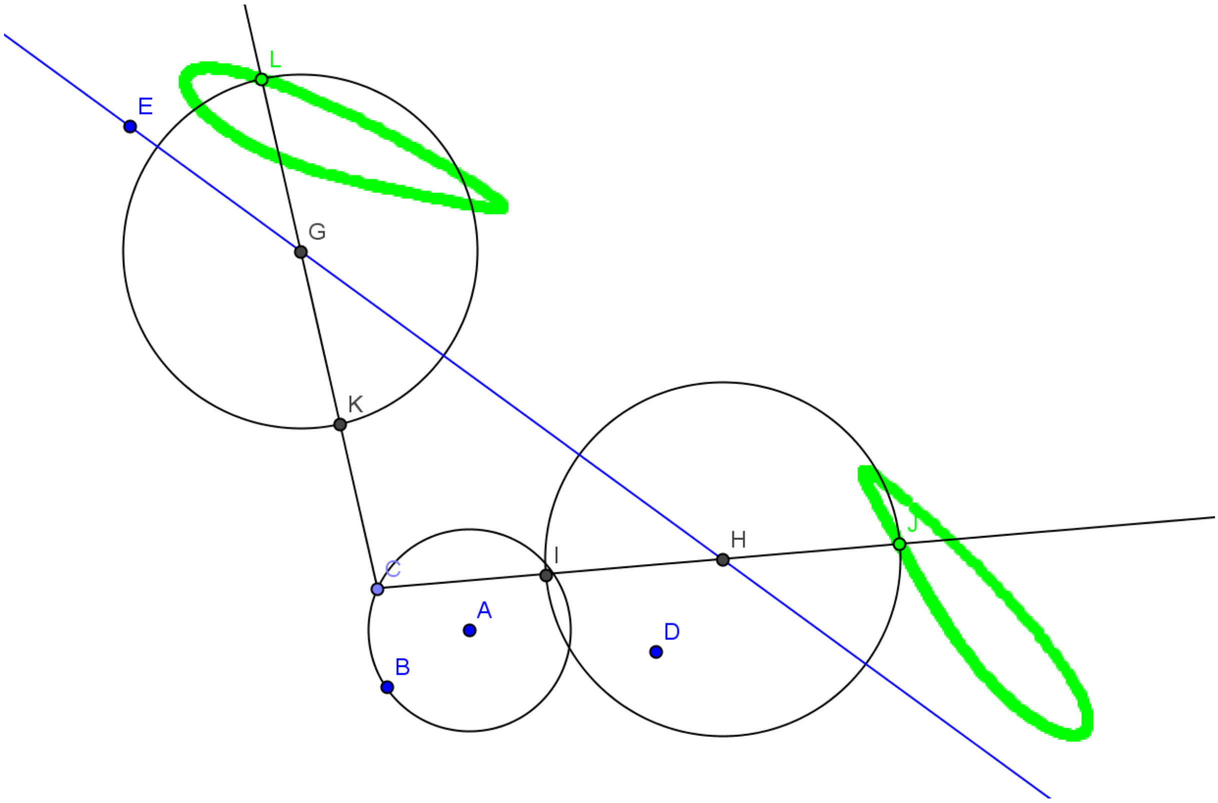
Hier ein Beispiel, bei dem die Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises geht



Dann entsteht anders als bei den Maschinen mit zwei Geraden eine geschlossene Kurve, die wie ein Oval mit Delle aussieht.

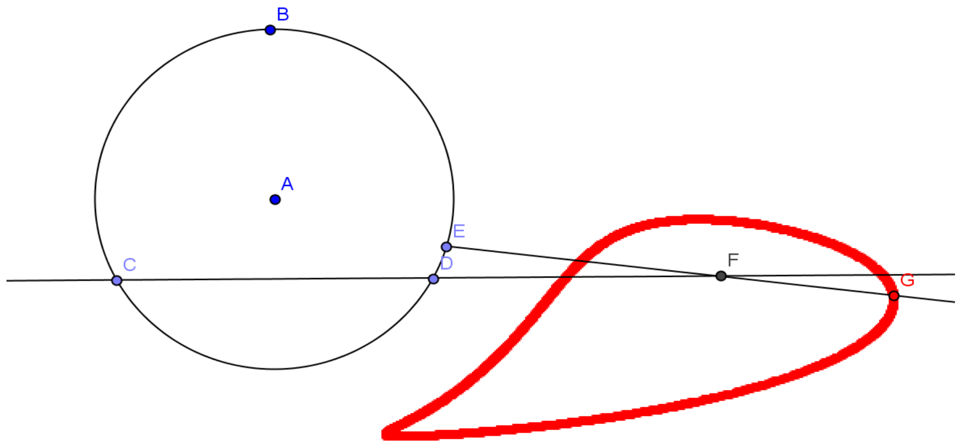
4. Die Doppel – Maschine

Interessanter wird es, wenn die Gerade nicht durch den Mittelpunkt A des Kreises geht, sondern z.B. außerhalb liegt. Außerdem haben wir zwei Stangen benutzt. Bei dieser „irren“ Maschine verschiebt man wieder den Punkt C auf dem Kreis um A.



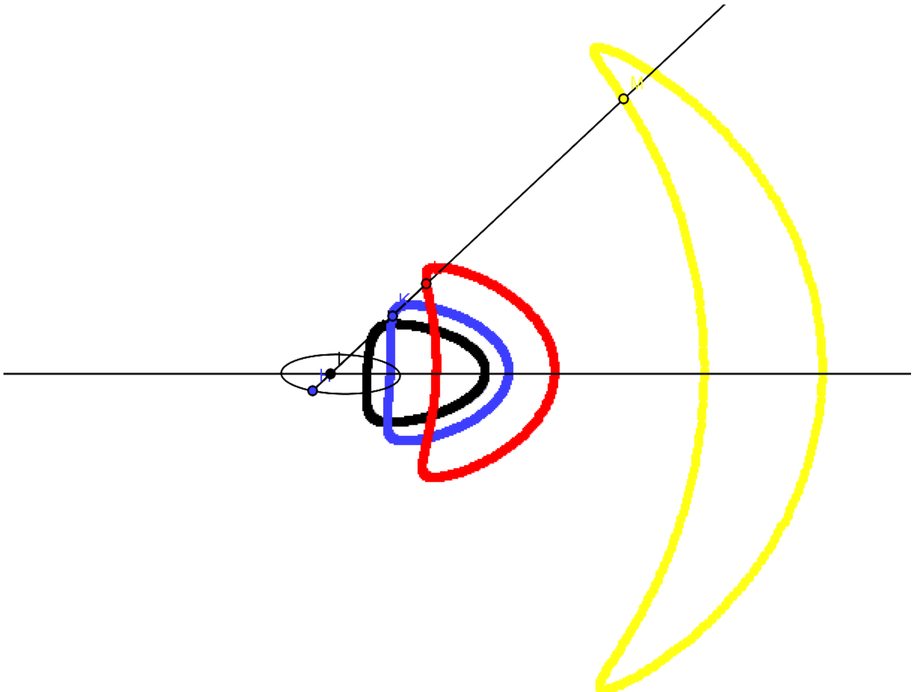
H und G bewegen sich auf der Geraden in einem festen Abstand von C. J und L sind von H und G gleich weit weg und zeichnen zwei Kurven. Diese Maschine zeichnet zwei Figuren gespiegelt auf einer Senkrechten zur blauen Geraden.

Die Kurven werden jetzt keilförmig, besonders, wenn die Gerade durch den Kreis geht:



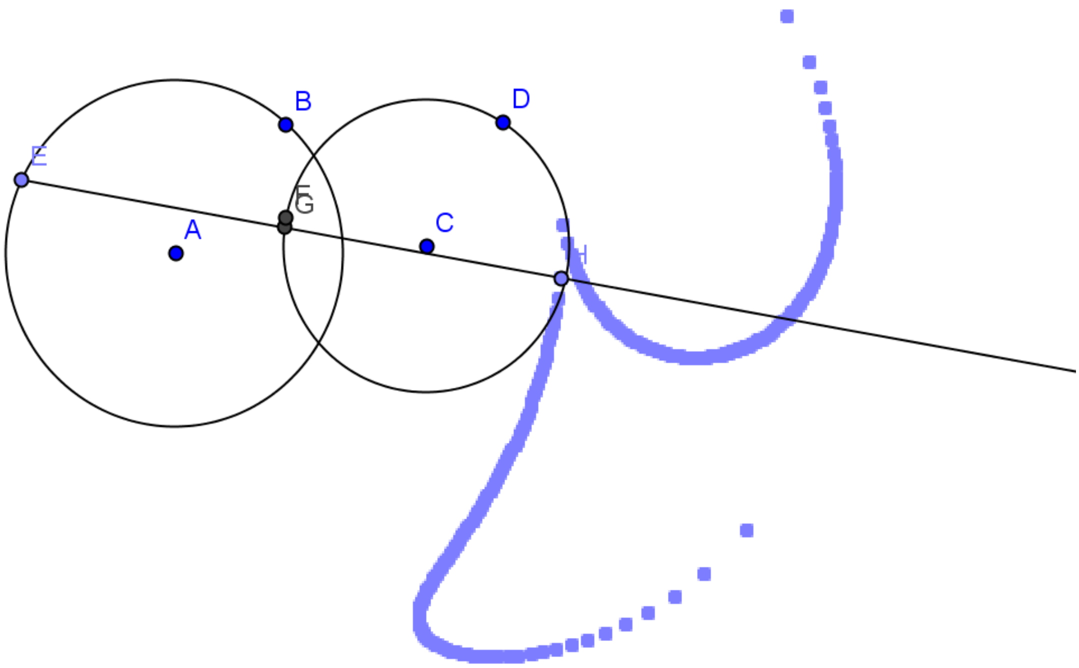
5. Aus dem Kreis wird ein Oval

Jetzt haben wir aus dem Kreis ein Oval gemacht und die Gerade wieder durch den Mittelpunkt gelegt. Außerdem haben wir mehrere Punkte auf der Stange gleichzeitig untersucht:



6. Die Kreis-Kreis-Maschine

Diese Maschine besteht aus 2 Kreisen. Wenn man Punkt E bewegt, bewegt er den auf der Halbgeraden liegenden Punkt G im gleichen Abstand auf Kreis C.



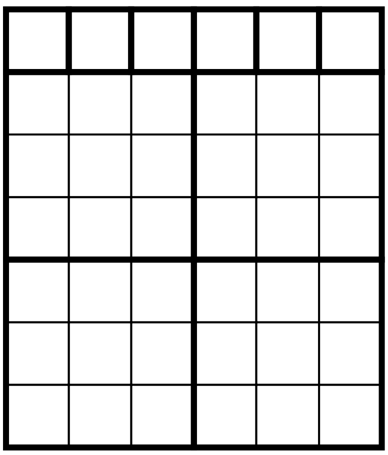
Diese Maschine erzeugt wirklich ganz irre Figuren und wir müssen sie noch genauer untersuchen.

Zerlegung von Rechtecken in eine möglichst kleine Zahl von Quadraten

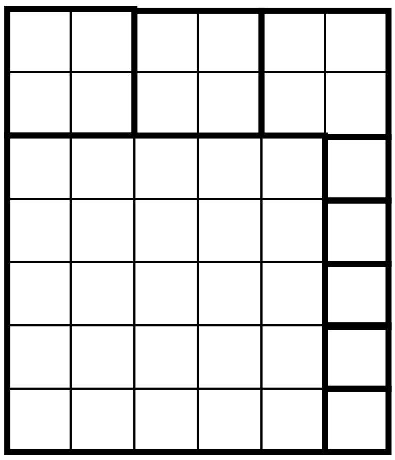
(Idee nach: Wettbewerb Känguru, 2012, Kl. 5 und 6)

In unserem Problem geht es darum, dass wir ein 7 Kästchen langes und 6 Kästchen breites Rechteck mit möglichst wenigen Quadraten ganz ausfüllen.

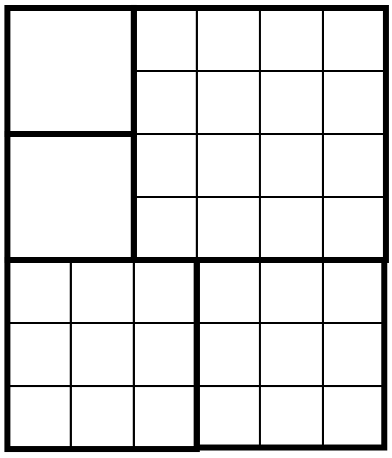
Dabei können wir die Lösungen im Känguruheft auf Seite 20 verwenden. Im Känguruheft geben sie zuerst eine Lösung mit 10 Quadraten an und verbessern dann ihre Lösung in mehreren Schritten.



10 Quadrate

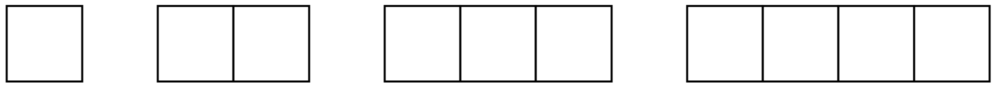


9 Quadrate



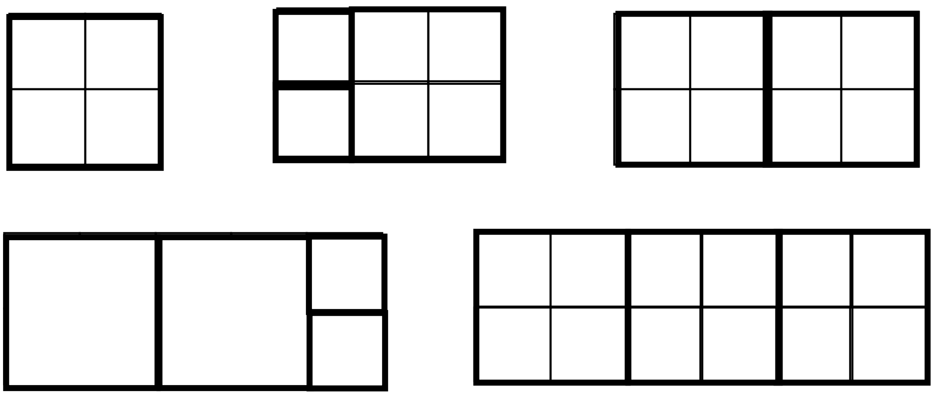
5 Quadrate

Wir gehen jetzt weiter systematisch vor und nehmen zuerst Rechtecke mit den Maßen: 1 x 1,   1 x 2,   1 x 3, 1 x 4   usw.



Hier muss man genauso so viele Quadrate benutzen wie es groß ist.

Interessanter wird es bei 2 x 2, 2 x 3, 2 x 4 usw.



Die Tabelle zeigt, wie viele Quadrate man mindestens braucht:

Breite	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Anzahl	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8